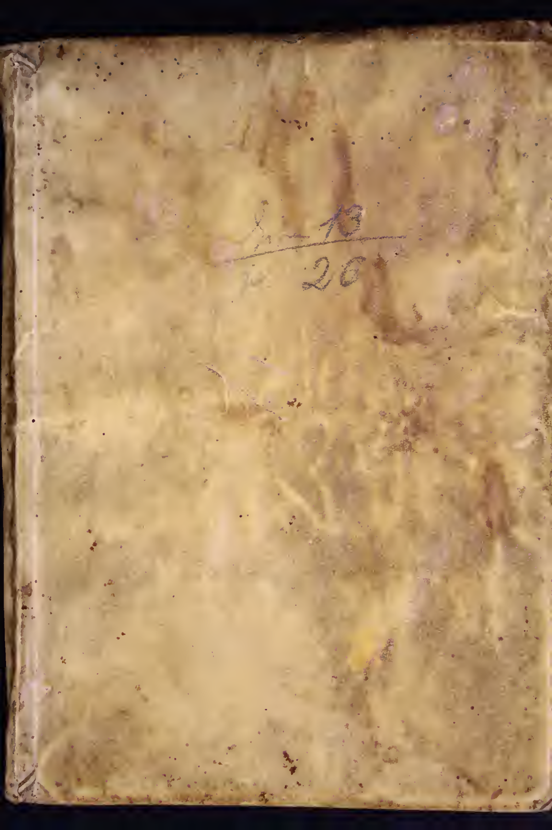

13
26

COMPENDIO

DE

MATHEMATICAS



PARA EL USO

DE LOS CAVALLEROS GUARDIAS-MARINAS.

POR EL CORONEL

DON LUIS GODIN,

DE LAS REALES ACADEMIAS DE CIENCIAS

DE

PARIS, LONDRES, BERLIN Y UPSAL.

CENSOR REAL DE LIBROS EN FRANCIA, Cathedratico de prima de mathemáticas, que fué, en la Real Universidad de S. Marcos de Lima y Director de la Real Académia de Cavalleros Guardias-Marinas.

I. PARTE.

REIMPRESO

En la Real Isla de Leon
En la Imprenta de la misma Académia.
Año de M.DCC.LXXXVIII.

APROBACION DEL Sr. LIC. DON GERO-nimo Ignacio Cavero, Canonigo Lectorál de la Santa Iglesia de Cadiz y Colegial mayor de San Salvador de Oviedo de la Universidad de Salamanca, &c.

De comision del Señor Dr. Don Miguel Benito de Ortega, Provisor y Vicario General de esta Ciudad y Obispado, ví y reconocí el Compendio de Mathemáticas para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinás de la Real Académia de esta Ciudad. Y atendiendo con curiosa advertencia el desempeño de su Autór tan conocido en Europa y la América por literatura, desvelo y aplicacion; hallé que su trabajo, tan perfecto como instructivo, y su estúdio tan continuado, eran, no solo merecedores del aplauso universal, sino que, por no contener expresion alguna que se oponga á la pureza de nuestra Santa Fé, se le debe dar, para que salga á la publica luz, la licencia que se solicita. Asi lo jusgo. Cadiz y Diciémbre 5 de 1757.

Lic. Don Gerónymo Ignacio Cavero.

NOS

NOS EL Dr. DON MIGUEL BENITO DE ORtega Cobo, Abogado de los Reales Consejos, Catedratico de prima en Leyes, Colegial en el mayór Universidad de Osuna, Provisór y Vicario General de esta Ciudad y su Obispado: por el Illmo. y Rmo. Sr. Don Fray Thomas del Valle, mi Señor, por la gracia de Dios, y de la Santa Sede Apostolica, Obispo de dicha Ciudad, del Consejo de S. M, su Capellan mayór y Vicario General de la Real Armada del Mar Occéano, &c.

POr el presente, y por lo que á Nos toca, concedémos licencia para que se dé á la estampa el Compéndio de Mathemáticas para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas, formado por el Coronél Don Luis Godin, Director de la Académia Real de dichos Cavalleros; por quanto de la Censura que de nuestra orden ha dado el Señor Dr. Don Gerónymo Ignacio Cavero, Canonigo Lectoral de esta Santa Iglesia y Juez Synodal de este Obispado, resulta no contenér cosa que se oponga á nuestra Santa Fé y buenas costubres synodales. Dado en Cadiz á seis de Diciembre de mil setecientos cinquenta y siete años.

Dr. Don Miguél Benito de Ortega Cobo.

Por mandado del Sr. Provisor y Vicario General.
D. Juan Antonio Ruiz Moreno.
Notario May.

APROBACION DEL Sr. LIC. D. GERONYMO *Ignacio Cavero, Canonigo Lectoràl de la Santa Iglesia de Cadiz y Colegial mayór de San Salvadór de Oviedo de la Universidad de Salamança, &c.*

DE comision del Señor Don Joseph Xaviér de Solórzano, del Consejo de S. M. y Alcalde mayór de esta Ciudad, volví á ver el Compéndio Mathemático para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas: y seguro de que no contiene palabra ni expresion que se oponga á nuestra Santa Fé y buenas costumbres, digo que ni á las regalias de S.M; porque no siendo nuevo que sin ciéncia ni arte se pueda hacer en todas facultades y matérias lo que pide el arte y la çiéncia, como dice el Filosofo, y mi Angelico Maestro: pero asi el Angelico Doctor, como Aristóteles mismo, confiesan lo aventurado que es sin la precisa sabiduria en los asuntos, manejarse solo por sola la práctica en las operaciones; por lo que reitero mi Dictamen, que se le debe dar al Autór de este Compéndio la licencia que solicita para la impresion, para el mayór servicio del Rey y del publico. Cadiz 5 de Diciembre de 1757.

Lic. Don Gerónimo Ignacio Cavero.

DON JOSEPH XAVIER DE SOLORZANO, del Consejo de S.M, su Ministro honorario de la Real Audiencia de la Ciudad de Sevilla, Teniente de Gobernador y Alcalde mayór de esta de Cadiz y Juez Subdelegado de imprentas y librerías en ella y su Obispado, &c.

DOy licencia para que se pueda imprimir un Quaderno titulado Compendio de Mathemáticas que para el uso de los Cavalleros Guardias-Marinas, ha dispuesto el Coronél Don Luis Godin, Directór de la Real Académia de dichos Cavalleros Guardias-Marinas; por quanto no contiene cosa alguna que se oponga á los preceptos de N. Santa Fé, buenas costumbres y Reales Pragmaticas de S.M, sobre que, de comision mia, ha dado su Censura el Señor Don Gerónimo Ignacio Cavero, Canonigo Lectoral de la Santa Iglesia Catedral de esta Ciudad, con tal de que no exceda cada uno de los exemplares de diez y ocho pliegos, y que en todos ellos se comprenda dicha Censura y esta Licencia. Dada en la Ciudad de Cadiz á seis dias del mes de Diciembre de mil setecientos cinquenta y siete años.

Dón Joseph Xavièr de Solórzano.

Por mandado de su Señoria.

Francisco Pacheco y Guzmán.

ARTICULOS DEL COMPENDIO de Arithmética.

ERRATAS.

Págin.	*Lin.*	*Dice*	*Corr.*
21	14	394928	394928
	15	592392	592392
25	10	undades	unidades.
28	23	24	324
45	3	39	36
49	9	compexos	complexos.
54	3	$=^7$	$=\frac{7}{1}$
62	12	por 40,00	por 4000 de abaxo.
65	20	1|10	1|01
160		150	160
161		151	161

INTRODUCCION.

LOs Tratados de Mathemáticas theóricos elementares que conducen á la construccion de los Navios, á su gobierno, y á su maniobra; en viages particulares y en Armada; en tiempo de paz y en él de guerra; que necesita saber un perfecto Oficial de Marina; son los que se enseñan en esta Real Académia á los Cavalleros Guardias-Marinas.

Sin ese estúdio muchos Oficiales han sido buenos; es un decir común, no es un parecer fundado en princípios, por no estar impuestos en ellos, y no tener voto los que hablan asi: Que se debe entender por un perfecto Oficial de Marina? Convéngase en su definicion exacta, uniendo en ella las precisas calidades del entendimiento y de la instruccion con las del ánimo; y con ella sola se desvanecerá la contrariedad. Unos Oficiales sin Mathemáticas han sido buenos; con ellas hubieran sido mejores; con ellas en algunas ocasiones hubieran cumplido mejór con su obligacion; hubieran adelantado mas el servicio del Rey, cuyas órdenes requieren y suponen siempre la mayór capacidad posible: Negarse á esto qualquiera Oficial, es negarse á la atencion que debe á lo que le importa; es negarse á la razón que manda, á la obligacion que no permite yerro de voluntad; ó quando menos es querer disimular la infelicidad, y solapar el sonrojo de los que han carecido de instruccion.

El que dudase que sean precisas las Mathe-

máticas en la construccion de Navios, en la Maniobra, en el Pilotage, en la Artilleria, será porque ignora que esas Ciéncias tratadas como deben serlo penden de una Geometria sublime, de una Mechánica recóndita, de una Cosmographia completa, de una Physica dilatada: es indecible el atraso que se ha seguido á esas Ciencias de Marina con haberlas dexado, y en particular las tres primeras, al manejo de hombres ignorantes, que las han tratado como artes mechánicas las que con suma lentitúd se llegan á adelantar quando las faltan la luz y el acierto de la theórica.

Sin Mathemáticas un Constructór podrá hacer un Navio que se tendrá por bueno, porque manifestará menos defectos que otros; y será un acaso tal, que puede ser no salga otro con las mismas calidades aunque con las mismas medidas: El Constructór ignora el éxito de su trabajo, mientras queda el Navio en el astillero; todas sus reglas, todas sus operaciones fluyen de una práctica ciega recibida á ojos cerrados de sus Maestros, continuada por largo tiempo sin examen, y quando mas con una corta variacion, por algunos reparos de los hombres de mar, reparos no despreciables en sí, pero siempre incompletos, y que á veces causan nuevos, y mayores inconvenientes.

Sin Mathemáticas, un Piloto, un Contramastre llevarán, y gobernarán un Navio con felicidad hasta dar con él una vuelta á la Tierra por qualesquiera tiempos; que importa? uno, y otro cometen, ó están prontos á cometer á cada instante yerros fatales, por no saber mas que lo mechá-

ni-

; el uno con una mu-
cha, el otro con ninguna, de los fundamentos en que estriba; ambos incapaces de distinguir, y escoger entre las operaciones y faenas diversas, según los diversos casos que se ofrecen: Y en quanto al primero de estos empleos, uno de los mas importantes que hai examínese con atencion entre las Naciones que le han menestér, y se reparará que, generalmente hablando, es el peór servido de los que tienen por objeto una práctica necesária al comércio de la Sociedad.

Apenas entre cien Pilotos se hallará uno que sepa en efecto el pilotage; la mayor parte de ellos le ignoran enteramente, y solo unos pocos se mantienen con un corto número de prácticas, toscas, á veces falsas, sin la mas leve curiosidad de examinarlas, y emendarlas; sin la menór voluntad de instruirse en otras mejores de que les dan noticia: De alli nace que el pilotage no se perfecciona, sin embargo de los muchos que escriben, y de los muchos mas que navegan: Y si los primeros no salen á la mar, si los segundos no se aplican, sucederá siempre asi, y solo se conseguirá algún adelantamiento en unas ocasiones raras, en que Hombres de theórica, y deseosos del bien publico irán á prácticar ó á mandar.

Pudieran hacerse reparos no menos acertados, y de mucha consideracion sobre el méthodo de cortar las velas, y distribuír la carga en un Navio, sobre la Artilleria de mar, las Evoluciones, y demás puntos principales del servicio de Marina, que debe saber un buen Oficial ó porque los ha

de

de executar, ó porque se ha de asegurar de la buena execucion. Pero lo apuntado basta por mi parte en una Introduccion á un compéndio de tratados formados con el fin de contribuir el posible remédio á esos inconvenientes.

No por eso se pretende que todos los Oficiales de Marîna de un dilatado Reyno deban ser Mathemáticos, ó alcanzar, y perfeccionar la theórica por importante que sea al Estado; antes conviene el que la mayór parte de ellos se apliquen, como sucede, á executar con acierto, y por los méthodos puestos en uso, las órdenes que reciben; bastan algnnos que se dediquen á la theorica, quando su génio, y una cierta facilidad los lleva y los mantiene en esos estúdios mas prolixos: Los hai en España, y los habrá con mas freqüéncia, luego que se acaben de desterrar, ya la nota injusta, ya el sonrojo inconsequente de haberse aplicado uno á las mathemáticas algo sublimes. Pero con la evidéncia de que algo de mathemáticas han de saber todos, se procura poner en estos compéndios lo preciso de los princípíos que pueda satisfacer á unos y otros: unos con ver todo, se impondrán en los elementos necesarios para ir mas adelante; otros con la práctica sola de las principales reglas tendrán lo que hace á su intento.

Semejante compendio que se debe explicar con la voz viva á unos jovenes Cavalleros como los Señores Guardias-Marinas en su Académia, no admite en el príncípio un discurso general sobre estas ciéncias, sobre su distribucion en los tratados elementares que se han de dar, y sobre el método-

do que se ha seguido en cada uno de ellos. Menos permite un examen del de otros Autores en asuntos de la misma espécie. Unas reflexiones de ese género pudieran ser útiles á personas ya instruidas, pero á los principiantes no hechos aún á razonamientos abstractos, les causaria un fastidio, y un atraso tal vez irremediable.

Empezamos por la Arithmética. En ella se ha procurado poner con claridad, y en términos adequados lo necesário para saber las cuentas en lo Civil, las propiedades de los números, y operaciones precisas en las Ciéncias que se enseñarán en adelante. Se han dado las demonstraciones, pero se han abreviado las explicaciones, y se han puesro pocos exemplos, particularmente en las reglas mas comunes y faciles. Lo primero se juzgó preciso para convencer de la verdad de las propriedades, y de la exactitud de las reglas que contiene el tratado. A lo segundo suple la voz viva própria de los compéndios, como tengan estos en méthodo claro lo suficiente para interesar la memória, y despertar el juício. En quanto á lo tercero, sobran Maestro y pizarra, hai tiempo bastante, y no faltará la aplicacion en estos Cavalleros, tanto en las Salas de la Académia, como fuera de ellas.



DE-

DEFINICIONES, Y SIGNOS GENERALES para este Compendio de Mathemáticas.

LAs Ciéncias Mathemáticas consíderan la *cantidad* assi *inteligible*, como *sensible*, es á decir todo lo que se concibe, y es capaz de mas ó de menos. La cantidad no solo se aplica á lo que goza número, extension sensible, peso, sinó tambien comprehende el tiempo, el movimieuto, la luz, el sonido, las calidades, las perfecciones, las relaciones, las suertes, y generalmente todo lo que tiene partes, , modificaciones, cotejos, y puede ser mayór, igual, ó menór en sí, y por comparacion con otras cantidades de una misma espécie. Asi el Mathemático trata de los números, considera los cuerpos; forma figuras, mide la tierra, determina la profundidad de los cielos, acierta con el movimiento de los astros, descompone la luz, sigue el sonido, construye máquinas, aumenta, ó limita su energia, levanta edificios, ordena exercitos, fortifica ciudades, lleva navios de una parte del mundo á otra, &c. y todo quanto es capaz de contarse, pesarse, compararse, componerse, y descomponerse, es digno de su atencion, y objeto de su aplicacion.

La cantidad se divide en *discreta* quando sus partes no son dependientes una de otra, ni están ligadas entre sí, como los *números*; y *continua* quando sus partes dependen una de otra, y estan ligadas entre sí, como los *cuerpos*. Ambas espécies

cons-

constituyen la cantidad *permanente*, cuyas partes existen todas en un mismo instante, distinta de la cantidad *succesiva*, cuyas partes no existen todas en un mismo instante, sinó unas despues de otras, como el *tiempo*, y el *movimínto*.

La Mathemática es *pura*, ó *mixta* segun considera la cantidad en sí, ó en la matéria: la primera comprehende la *Arithmética* y la *Geometria*, ambas *universales*; la segunda se compone de todas las demas ciencias, cuyo objeto es la cantidad sensible: tales son la Mechánica, la Optica, la Astronomia, la Navegacion, la Artilleria &c, que son propriamente ciéncias phisicas, sugetas á principios de Mathemática pura, y deben ser llamadas por eso *physico-mathemáthicas*.

Su estudio es siempre util, y á veces preciso para servir á la Pátria, perfeccionar las artes, adelantar la Philosophia; lo es tambien para aprender á raciocinar, para gobernarse en lo particulár, tratar las demas ciencias, y generalmente para inquirir la verdad en todo lo que se ofrece, y es permitido á la curiosidad humana.

El orden que observa es exacto, rigoroso; nada admite sin prueba: ha merecido por su solidéz que la es peculiár, califica todo método exacto en qualquiera matéria que sea; le llaman siempre *orden ó méthodo geométrico*.

Su modo de proceder es por *definiciones*, *axiomas*, *postulados*, *proposiciones* que acaban siempre en *demonstracion*. Las proposiciones se dividen en *lemmas*, *theoremas*, *problemas*, que tienen *aparte* su *resolu-*

solucion, y todas pueden tener sus *corolários*, y sus *escolios*.

Definicion es una expresion clara y simple, que subministra las primeras notícias, y de las esenciales de lo definido, que lo distinguen de todas las demas cosas, y no pueden convenir á otra ninguna; v.g. *la Arithmética es la ciéncia de la cantidad discreta.*

Axioma es una asercion evidente de por sí, concedida por todos, y que no necesita prueba; *el todo es mayor que una de sus partes.*

Postulado es lo que se pide, ó supone, y no se puede negar, ni contradecir, ó por ser verdadero de por sí ó por deducirse de definicion, ú de nociones verdaderas, como *se puede tomar de una cantidad una parte menór que el todo.*

Proposicion es todo lo que se asegura ó se niega; necesita su prueba; consta de *hipótesis* y de *thesis*; la praimera es *de que*, y la segunda es *lo que* se asegura ó se niega. *De dos números desiguales las mitades son desiguales.*

Lema es propocision que debe servir á probar, ó facilitar y abreviar la prueba de otra proposicion.

Theorema es una proposicion especulativa, que construye un punto de doctrina general; á mas de la proposicion tiene *la demonstracion.* En esta se declaran las razones que evidéncian la verdad de la proposicion.

Problema es una proposicion práctica en que se executa algo, como *partir una cantidad en tantas partes, que tengan entre sí tal ó tal relacion que se ex-*

presa. Tiene tres miembros, la *proposicion*, que dice lo que se ha de hacer; la *resolucion ó solucion*, que lo executa y la *demonstracion*, que prueba haberse conseguido.

Corolário es una nueva proposicion que sigue immediatamente de otra que se acaba de demonstrar: algunas veces necesita que se añada algo á la demonstracion, que precede; otras veces no.

Escólio de una proposicion, es una anotacion que la aclara, responde á las dificultades, se opone á las equivocaciones si se temen, y trahe lo historíco de la invencion, y de los buenos ó malos usos que se han hecho de essa proposicion.

Los signos siguientes son de mucha comodidad, y de un uso freqüente; se ponen con anticipacion para que se reparen desde el princípio, pero no se emplearán antes de haber tratado lo que sirve á su explicacion; ofreciondose estos, se ocurrirá á la que se da aquí, si hai dificultad para entenderlos.

$+$ Significa *mas*; $A+B$ es *A mas B*; indica la *Adicion*. La cantidad precedida con el signo $+$ que se dice *afectada* del siguo $+$ es cantidad *positiva*. El signo se llama también *positivo*.

$-$ Denota *menos*. $C-D$ es *C menos D*. Señala la *substraccion*. La cantidad afectada del signo $-$ es cantidad *negativa*. El signo se llama también *negativo*.

$=$ Es signo de *igualdad*. $A=F+G$, se lee *A es igual á F mas G*.

$\begin{Bmatrix} > \\ < \end{Bmatrix}$

$>$ $<$ } Son signos de *desigualdad*. La cantidad menór se escribe al lado de la punta, la mayór al otro lado. $A > B$, denota *A es mayor que B*. $5<9$ se lee 5 *es menor que* 9.

. Un punto entre dos cantidades juntas de que se trata, y puesto algo alto, indica la *Multiplicacion* de la una por la otra cantidád; 3 . 2, se lee 3 *multiplicados por* 2. Algunos se valen de estotro signo ×.

: Dos puntos entre dos cantidades indican la *Division* de la primera por la segunda; 6:2 dice 6 *partidos* por 2. Se escribe tambien de otra manera, como se dirá en su lugár.

, Una coma entre dos cantidades que se comparan, indica la *Diferencia*, esto es el exceso de la mayór sobre la menór ó el defecto de la menór respecto de la mayór.

El sigo siguiente se reparará despues de las primeras reglas de Arithmética; es de mucho uso en todas las Mathemáticas.

$\overline{\quad}$ ( ) Una ó mas líneas tiradas encima de distintas cantidades, y uno ó mas parénthesis que las encierran, significan igualmente que todas las cantidades, que están debaxo de una misma línea, ó entre el mismo parénthesis, se toman juntas con sus respectivos signos para la asercion ó el uso de que se trata en el discurso, ó que se indica en la expresion. Por exemplo, $\overline{A+B-C}:D-F.N=S-R:Z+V$, dice *A mas B menos C* considerados como una sola cantidad, siendo *partidos por D menos F multiplicado*

cado antes *por N* formarán una nueva cantidad *igual á S menos R partido por Z*, y á que se habrá añadido despues de la particion la cantidad *V*, *ó mas V*.

En números, y con los paréntheses (32+23−7):(10−6).2=(20−5):3+1. Se ha de reparar que 32+23−7 forman una cantidad encerrada en su paréntesis particulár, esta cantidad =48, se ha de partir por otra cantidad, que es 10 menos 6 que tiene también su parènthesis á parte, esto es 4, que se multiplicarán por 2, y harán 8; y hecha la particion quedarán 6. la cantidad que saldrá de estas operaciones, será igual á la cantidad 20−5, esto es, 15 que se partirán por 3, esto es á 5. mas 1 que se le añadirá.

Si se ofrecieren otros signos particulares se declarán en su lugar.



COM-



COMPENDIO
DE
ARITHMETICA.

LA Arithmética es la ciéncia de la *cantidad discreta*, de los *números*, de su expresion, de su valór, de sus propriedades en sí y entre sí, dé sus combinaciones, cotejos, aumento, y disminucion, baxo de ciertas condiciones conocidas; y el méthodo de hallar el efecto de estas comparaciones.

DE LAS CIFRAS.

Los *números ó cifras* son signos de convencion que expresan la cantidad de un modo universal, como en la *Algebra*, ú de un modo particulár como en la *Arithmética* común, en que detirminan la cantidad de unidades: Pueden ser diversos como se ve entre los Antiguos que aplicaron las letras de su Alphabeto á ser cifras, y hoi entre todas las Naciones de Europa que usan ciertos signos, ó charactéres particulares, que se creen introducidos por los Arabes. Pudieran tambien ser infinitos, si cada cantidad de vnidades tuviera su cifra á parte; pero se han reducido con felicidad á diez, sin duda por los dedos de ambas manos, que sirvieron en el origen, y sirven hoi á los que ignoran

ran la Arithmética, de señales y de instrumentos de contar.

Estas diez cifras son.	0	cero ó nada
	1	uno
	2	dos
	3	tres
	4	quatro
	5	cinco
	6	seis
	7	siete
	8	ocho
	9	nueve

Con ellas se practica qualquiera *númeracion*. Esto es, se puede esribir, y leer qualquiera cantidad numérica por gránde que sea, porque solas, valen las unidades de la convencion; precedidas de otra cifra á la derecha, valen diez veces mas; precedidas de dos cifras á la derecha, valen cien veces mas; de tres cifras, valen mil veces mas; &c. De suerte, que en cada cantidad númerica se ha de atender á las cifras de por sí; y al orden que ocupan. Los ordenes se cuentan de la derecha hácia la izquierda; la cifra puesta en el primero expresa *unidades*; la del segundo *decenas*; la tercera *centenas*; la quarta *miles*, ó *millares*; la quinta *decenas de millares*; la sexta *centenas de millares*. Despues de estos seis órdenes, entran otros seis, que son *millones* ó *cuentos*, y son siempre millones ó cuentos de unidades. El séptimo orden expresa *unidades de cuentos*; el octavo *decenas de cuentos*; el nono *centenas de cuentos*; el decimo *miles ó millares de cuentos*: el undécimo *de-*

ce-

cenas de millares de cuentos; el duodécimo *centenas de milla res de cuentos*. Entran luego ot.os seis órdenes de *bil lones ó bicuentos*. La décima tércia cifra expresa *unida des de bicuentos*; la decima quarta *decenas de bicuentos* &c. Los seis órdenes que siguen á estos son *trillones* ó *tricuentos*; otros seis son *quadrillones* ó *quadricuentos*, y asi en adelante.

La cifra o que no expresa nada de por sí, sirve para conservar el orden, y por consiguiente el valór á cada una de las cifras que la siguen á la izquierda, como si se quiere escribir *diez*, siendo una decena basta la cifra 1; pero ha de ocupar el segundo órden, luego otra cifra ha de haber en el primero, y si esta expresára algo de por sí, valdria el número mas de diez; pero poniendo o en esta conformidad 10 solo se leerá *diez*, por hallarse 1 en el orden de las decenas, y cero ó nada en él de las unidades. Con esto se puede hacer la numeracion de una cantida qualquiera: se dividirá ligeramente de seis en seis cifras de la derecha hácia la izquierda; la primera division siendo cabal de seis cifras, expresará siempre (yendo de la derecha hácia la izquierda) unidades, decenas, centenas, miles, decenas de miles, centenas de miles de unidades. La segunda division expresará lo mismo de cuentos; la tercera de bicuentos, &c. La última division tendrá ó no seis cifras cabales, solo se leerá lo que expresaren las que tubiere.

Sirva de exemplo la cantidad siguiente.

uni-

de bicuento.		de cuento.						de unidad.					
decen. . .	unidad. .	cent. de miles	decen. de miles	miles. . . .	centenas. . . .	decenas. . . .	unidad. . . .	cent. de miles.	decn. de miles.	miles.	centenas . . .	decenas. . . .	unidades. . .
7	3	5	9	0	2	8	1	9	0	4	6	9	3

Y se leerá *sententa y très bicuentos*, *quinientos noventa mil docientos y ochenta y un cuentos*, *novecientos y quatro mil seiscientos y noventa y tres unidades.*

Pensándose ó dictándose un número que se quiera escribir, se practicará la misma átencion de colocar cada cifra en su orden, y de conservárselo, con poner los ceros necesários en los ordenes que no pidiesen cifra de valór. Si quiero notar *quatro mil y siete*, veo que con 4 puesto en el quarto orden escribiré quatro mil, por eso ha de tener tres cifras á su derecha, la una indicará los cientos, la otra las decenas, y la tercera las unidades, pero la cantidad carece de cientos y de decenas simples, y solo tiene siete unidades, luego pondré dos ceros seguidos en el tercero y en el segundo orden, y 7 en el primero, y la cantidad en cifras será 4007.

Las cifras Romanas, que se emplean aún en ciertos casos, son las sigu etes.

I

I . . . . vale . . .		1
V		5
X		10
L		50
C		100
IↃ ó por el uso de escribir *D* .		500
M ó *CIↃ*		1000

Estas siete cifras conservan siempre su mismo valór, y bastan para qualquiér número, aunque de un modo mui difuso; se escriben y se leen de la izquierda hácia la derecha; las de mas valór, mas á la izquierda que las de menos; pero si una de menos valór se halla á la izquierda de otra de mas valór, se quita de esta lo que vale esotra. El *I* puesto á la izquierda de la *V* en esta forma *IV* expressa 4; la *X* puesta á la izquierda de la *L*, assi *XL*, vale 40, porque se han de quitar 10 de 50; la *V* sola á la izquierda de la *C* como *VC*, valdrá 95: aunque en un caso único vale mas, en lugar de valer menos, aumenta, en lugar de disminuir; pero entonces, ó es caso rarísimo como *VC* por decir 500, ó hai otros cientos, otras *C* derechas, ó inversas que acompañan á la primera hácia la derecha, como en *VCIↃ*, que vale 5000. En otro qualquiera, como *IVCIↃ*, 4000 *IXCIↃ*, 9000, hai mas de una cifra menór antes de *C*, y hai otra *C* inversa.

Si no se hallan menores cifras puestas antes, ó á la izquierda de mayores, se lee la cantidad según el valór de cada cifra; *MDCCLVII*, expressa 1757; pero *MDCXCIX*, es 1699, que tambien se

puede escrivir de estos modos : *MDCIC* ; *MDCLXXXXIX* ; y aun sin mudar el valór de cifra alguna *MDCLXXXXVIIII*.

SUMAR NUMEROS.

SUmar es juntar dos ó mas cantidades de una misma naturaleza en una sola cantidad, que será la suma de ellas.

Escríbense las cantidades una debaxo de otra, unidades debaxo de unidades, decenas debaxo de decenas, &c, y se tira una línea ; y empezando por las unidades ó cifras de la derecha, se suman de memória todas las de la primera coluna ; si no passa la suma de 9, se escribe toda en la misma coluna debaxo de la línea ; pero si llega á 10, á 20, á 30, &c, esto es á 1 decena, á 2 decenas á 3 decenas, &c, ó si llega á 10 y tantos ; esto es á 1 decena, y tantas unidades ; á 2 decenas, y tantas unidades, se escribe o ú el exesso sobre 10, 20, 30, &c, y se lleva para la coluna immediata hácia la izquierda 1, 2, 3, &c, según el número de decenas que hubiesse.

Se junta esse número de decenas con los demas números de esta nueva coluna, y se practica con ella lo mismo que con la primera, y assi en todas las demas ; pero en la última se escribe todo lo que monta el agregado de los números de ella, por no haber ya otras cifras conque agregar las decenas de su espécie, que se encontrassen.

Exemplo. Para sumar las tres cantidades pues-

tas

tas mas abaxo, se dirá 6 y 2 son 8, y 1 son 9: se escriben 9 debaxo; y passando á la siguiente coluna 3 y 3 son 6 y 1 son 7: se escriben 7 en la misma segunda coluna; luego en la otra 5 y 9 son 14, y 6 son 20: se escribe 0 en esta tercera coluna, y se lleban 2 á la que sigue; estos 2 y 2 son 4, y 8 son 12: se escriben 2 y se lleva 1, y 7 son 8, y 5 son 13, y 2 son 15: se escriben 5 en esta coluna, y 1 á la izquierda por no haber mas cifras que sumar: la cantidad escrita con esta operacion debaxo de la línea, es la suma de las tres que se habian de sumar.

$$\begin{array}{r} 72536 \\ 50932 \\ \underline{28611} \\ 152079 \end{array}$$

Si las cantidades que se han de sumar son *complexas*, esto es de partes mayores unas que otras, y partes ó porciones estas de aquellas, las que se llaman tambien *números denominados*, como en los pesos, son quintales, arrobas, libras, onzas, &c: en las medidas en largo, varas, pies, pulgadas, líneas, &c: en las monedas; escudos, reales, marávedis; en las medidas de ángulos, grados, minutos, segundos, &c: se escriben las partes de una misma espécie en una misma coluna; se empieza á sumar por las de menór espécie según el número de partes menores que hacen una de las próximamente mayores, se lleva de la suma de las me-

no-

nores á las immediatamente mayores tantas veces 1 quantas veces se encuentra este número de partes. v.g. se han de sumar las tres cantidades siguientes de grados, minutos, y segundos que se señalan con *g* ó con ° *grad.* ′ *min.* ″ *segund.* y sabiendo que 60″ componen 1′ y que 60′ valen 1°, se dirá empezando siempre por la espécie menór, 5 y 2 son 7, y 6 son 13: escríbense 3, y se lleva 1, y 2 son 3, y 5 son 8, y 4 son 12; en este número 12 se hallan 2 veces 6, y por estar en la coluna de decenas de segundos, son 2 veces 6 decenas, ó 2 veces 60 que hacen 2′, luego se deben llevar á la coluna de los minutos, y decir 2 que se llevan, y 2 son 4, y 6 son 10, y 9 son 19: se escriben 9, y se lleva 1, y 4 son 5, y 3 son 8, y 1 son 9; en este número 9 hai una vez 6, y sobran 3: luego se escriben 3 allí mismo, y se llevan 6 decenas de minutos que hacen 60 minutos que valen 1 grado: luego se lleva 1 á la coluna de los grados, y 7 son 8, y 8 son 16, y 3 son 19; se escripen 9, y se lleva 1, y 5 son 6, y 4 son 10, y 2 son 12, se escriben 2, y no habiendo mas que sumar, se escriben tambien mas adelante 1.

57.°	42′.	25″.
48.	36.	52.
23.	19.	46.
129	39	3

El examen del sumar que se llama su *prueba*, es el restar como se advertirá luego.

La *demonstraciom* de la operacion es esta. Se han escrito los números uno debaxo de otro, las unidades de cada cantidad en una misma coluna, las decenas en otra, las centenas en otra, &c; se

se han sumado las cifras de cada coluna, y la suma hasta 10 exclusive se ha escrito en ella, y quando ha habido una ó mas decenas se han pasado, y agregado á los números de la siguiente coluna que contiene las decenas de la antecedente, &c, luego la suma de ellas es la verdadera suma que se pedia, suponiendo que cada operacion particular esté bien hecha. Lo mismo se hará ver en el sumar de los números denominados añadiendo la consideracion de la suma de las espécies menores que se pasa y agrega á la coluna de las proximamente mayores, quando en esa suma ha habido una ó mas unidades de la espécie mayór.

RESTAR UN NUMERO DE OTRO.

Restar en Arithmética es quitar una cantidad menór de otra mayór, siendo las dos de una misma espécie, para saber el resíduo que en general es la *diferençia* de la una á la otra. Se escriben las dos cantidades la mayór arriba, y la menór debaxo, se tira una línea, y empezando por las unidades se resta el número inferiór del número superiór, si se puede; se escribe el resíduo debaxo de la línea en la misma coluna, y se pasa á la siguiente para hacer lo mismo; y assi en las demás. Si no se puede restar el número inferiór del superiór por ser este menór que aquel, se aumenta el número superiór de 10, y siempre sale mayór que el inferiór que por consiguiente se puede restar, y se escribe el resíduo; luego se lleva 1 á la coluna siguien-

guiente que se añade al número inferior immediato que se ha de restar de su correspondiente superiór; y assí de los demás.

Por exemplo de	152079
se han de restar	123468
diferencia ó resíduo ...,	28611

Se dirá : 8 de 9 , queda 1 , que se escribe de baxo en la misma coluna ; en la segunda 6 de 7 , queda 1 ; en la que sigue 4 de 0 , no se puede ; auméntase el 0 de 10 , y hacen 10 , luego 4 de 10 quedan 6, que se escriben , y se lleva 1 , y 3 son 4, de 2 no se puede , pero de 12 , (añadiendo 10)quedan 8 , que se escriben y se lleva 1 , y 2 de la siguiente coluna son 3 , de 5 quedan 2 , que se ecriben. En fin 1 de 1 queda 0 , que por no tener otros números á la izquierda no se escribe.

Lo mismo se practicará para restar grados, minutos , y segundos : varas , y sus partes ; pesos, &c , unos de otros , aumentando el número superiór si fuese menór que su inferior , de 1 de la espécie proximamente mayór , y convirtiendo , ó resolvíendo esse 1 en unidades de la espécie que se necesita : v.g. de

.....	129°	39′	3″
se han de restar	57	42	25
diferencia ó risíduo. ...	71.	56·	38.

Se dirá : 5 de 3 no se puede ; pero 5 de 13 (añadiendo 10) quedan 8 , y se lleva 1 , y 2 son 3 , de nada no se puede ; tómese 1′ : que vale 60″ ó 6

de-

decenas, esto es 6 de la coluna de segundos en que se está, y entonces 3 de 6, quedan 3, que se escriben, y se lleva 1, y 2 de la coluna siguiente, son 3, de 9 quedan 6, que se escriben: de la misma manera 4 de 3, no se puede, se toma 1° que vale 60′ ó 6 decenas, y 3 que hay hacen 9: luego 4 de 9, quedan 5, y se lleva 1, y 7 son 8 de 9 queda 1: 5 de 2 no se puede, pero 5 de 12 quedan 7, y se lleva 1, y nada es 1, de 1, queda 0, que por no haber mas cifras á la izquierda se omite.

Si en lugár de 129° 39′ 3″ se escribieran 128° 98′ 63″ que hacen la misma cantidad, pero no reducida, y se restara de ella la misma que antes, 57° 42′ 25″, el resíduo habria de ser el mismo que arriba.

128°	98′	63″
57	42	25
71	56	38

Estas dos primeras operaciones de Aríthmética, se sirven mutuamente de prueba. Para examinar si una suma de várias cantidades es exacta, se restarán de ella las cantidades una por una, que se han sumado; si han sido dos, restando la una, debe quedar la otra; si han sido tres ó mas, restando de la suma la una, y del resíduo la otra; &c, debe quedar la primera de todas, y no sucediendo assí, hay yerro en la operacion, y se debe hacer de nuevo.

Para examinar la substraccion, se sumará la cantidad que se ha restado con el resíduo, y la suma debe ser la misma cantidad de la qual se ha restado.

Importa mucho acostumbrarse desde los prin-

ci-

cipios á hacer el examen ó la prueba de cada operacion, para emendar luego el errór si le hay, y que no pase adelante, inutilizando todo un cálculo que puede ser largo.

La *demonstracion* de esta operacion del restar es como la del sumár, la narracion del mismo procedér de la operacion. Se ha escrito la cantidad menór que se debia restar, debaxo de la mayór de la qual se debia restar, unidades debaxo de unidades, decenas debaxo de decenas, &c. El número de unidades de debaxo se ha restado del número de unidades de arriba, y si el número ha sido menór, se ha aumentado de 10, tomando 1 de la cifra immediata, de que se ha tenido cuenta. Lo mismo se ha practicado con las decenas, con las centenas, &c; de suerte que se han restado las unidades unas de otras, las dedenas unas de otras, las centenas unas de otras, &c, y se ha escrito lo que ha quedado en las correspondientes colunas; luego se ha determinado el resíduo verdadero que era lo que se pretendia.

MULTIPLICAR UN NUMERO POR OTRO.

MUltiplicar un número por otro número, es tomarle ó añadirle á sí mismo tantas veces, quantas unidades tubiere aquel por el qual se ha de multiplicar.

El uno se llama *multiplicando*, y el otro *multiplicador*; tambien se llaman uno y otro *factores*: la cantidad que forman multiplicándose, se llama *pro-*

ducto.

ducto. Para multiplicar un número por otro se escriben ambos como si se hubieran de sumar ú de restar, por lo regulár el mayór arriba, se tira una línea; se multiplica el de arriba, el multiplicando, cifra por cifra de la derecha hácia la izquierda, por la primera cifra del de abaxo, del multiplicadór, esto es, por las unidades; el producto se escribe debaxo de la línea, tambien cifra por cifra, conforme se va hallando, y guardando como en el sumár cada vez que las hay, las decenas, centenas, &c, para juntarlas con el producto de la cifra ú de las cifras siguientes del multiplicando. Luego se multiplica del mismo modo el mismo número de arriba por la segundá cifra, esto es, por las decenas del de abaxo, y el producto se va escribiendo de baxo del primero ya escrito, pero con la adverténcia en todos los productos particulares, de poner siempre la primera cifra de cada uno debaxo ó en la coluna de la que ha servido de multiplicadór: la suma de los productos parciales es el producto total que se busca.

Y porque se hán de multiplicar en esta operacion las cifras una por otra, se debe tener de memória el producto de cada una de las 9 por cada una de las 9, lo que antes de alguna práctica no se sabe. Se suple á los princípios con una cierta disposicion de esos productos ya hechos de las 9 cifras entre sí, que se llama *Tabla Pytagórica*, y es la siguiente.

Se toma el menór de los factores en el renglon de arriba, y el mayór en la coluna de la izquier-

da, y la cantidad que al mismo tiempo se halla en el renglon de un factór y de baxo de otro es el producto que se busca.

TABLA PYTAGORICA.

Factores	2	3	4	5	6	7	8	9
9	18	27	36	45	54	63	72	81
8	16	24	32	40	48	56	64	
7	14	21	28	35	42	49		
6	12	18	24	30	36			
5	10	15	20	25				
4	8	12	16					
3	6	9						
2	4							

Sin ella, que puede no estar pronta, basta tener de memória el producto de las cinco primeras cifras una por otra, que no passa de 25, y se sabe comunmente: el producto de las demâs se hallara luego del modo siguiente. Escríbanse una debaxo de otra las dos cifras que se han de multiplicar; póngase á la derecha de cada una su diferencia á 10; ella será siempre menór, ó quando mas, iguál á 5, multipliquense una por otra las dos diferencias, y escríbanse debaxo las unidades del producto (que serán con efecto las unidades del producto que se busca) reservando las decenas si las hubiere. Réstese una qualquiér diferencia, de la cifra que no es la suya; el resíduo dará las decenas del producto; añádasele el número de decenas, que se han

han llevado, si las hubo, escribase la suma á la izquierda de la primera cifra del producto en la coluna de las decenas, y se tendrá el producto que se desea. Por *exemplo* 7 veces 9.

7 . . . 3 De 7 á 10 van 3, de 9 á 10 va 1,
9 . . . 1 una vez 3 es 3, que se escriben debaxo,
6 3 luego 1 restado de 7, ó 3 restados de 9, quedan igualmente 6, que se ponen en las decenas, y salen 63 por el producto de 7 por 9.

Esto supuesto, para multip. 98732
por . . 6042

197464	product. por 2 unid.
394928	product. por 4 dec.
592392	product. por 6 mil.
596538744	producto total

Dispuestos los factores según se ha prevenido, digo 2 veces 2 son 4 que escribo; 2 veces 3 son 6, que escribo; 2 veces 7 son 14; escribo 4, y llevo 1; 2 veces 8 son 16, y 1 que he llevado son 17, escribo 7, y llevo 1; 2 veces 9 son 18, y 1 llevado son 19, y porque este producto particulár se acabó, escribo los 19, esto es 9 en su orden, y 1 mas adelante.

Passo á la segunda cifra del multiplicadór. 4 veces 2 son 8, escribo 8 en la segunda coluña; 4 veces 3 son 12, escribo 2, y llevo 1; 4 veces 7 son 28, y 1 llevado son 29, escribo 9, y llevo 2; 4 veces 8 son 32, y 2 que llevo son 34, escribo 4 y llevo 3; 4 veces 9 son 36, y 3 son 39, escribo los

39 , y está el produĉto parcial hallado.

La tercera cifra del multiplicadór es o , un produĉto por el seria todo de o , luego se puede excusar , y pasar á la cifra siguiente 6.

Digo 6 veces 2 son 12 , escribo 2 en la quarta coluna , la misma del aĉtual multiplicandór , y llevo 1 ; 6 veces 3 son 18 , y uno llevado son 19 , escribo 9 , y llevo 1 ; 6 veces 7 son 42 , y 1 llevado son 43 , escribo 3 y llevo 4 ; 6 veces 8 son 48 , y 4 que llevo son 52 , pongo 2 , y llevo 5 ; 6 veces 9 son 54 , y 5 que llevo son 59 , que escribo.

La suma de estos produĉtos parciales da el produĉto total que se pedia.

Hallándose algun cero en el multiplicando, se pondrá o en el produĉto en su correspondiente lugár , si no hai otra cifra de valór llevada del orden antecedente , porque en este caso se pondrá la cifra de valór en lugár de o. Por *exemplo.*

para multiplicar	504
por . .	27
	3528
	1008
	13608

El produĉto de 4 por 7 es 28 , se escriben 8 , y se llevan 2 ; el de o por 7 es o , pero habiendose llevado 2 , escribo 2 en el orden de las decenas ; el produĉto de 5 por 7 es 35 , que escribo ; para el segundo produĉto parcial , 4 por 2 dan 8 , que escribo ; o por 2 es o , que escribo por no haber nú-

me-

mero llevado; 2 veces 5 son 10, que se escriben; y despues de la adicion, el produćto total es------ 13608.

Si las cantidades que se han de multiplicar son complexas (números denominados) entrambas, ó solo una de ellas, se reducirán siempre á la menór espécie, y hecha la operacion con esta ú otras menores espécies, se reducirá el produćto á las espécies mayores que cupieren. v.g. se han de mnltiplicar 34 varas, 3 palmos, 6 dedos por 25; pues la vara tiene 4 palmos, las 34 varas serán 136 palmos, y con los 3 palmos serán 139; un palmo tiene 12 dedos, luego los 139 serán 1668 dedos, que con los 6 que hai, formarán en todo 1674 dedos, que se han de multiplicar por 25, y el produćto dará 41850 dedos, los que se reducirán á pálmos, y á varas, por la operacion del partir que se enseñará luego.

Un reparo se hará mas adelante sobre la multiplicacion de ciertas cantidades complexas, que dan un produćto de otra naturaleza, pero no se necesita ni se puede entender antes de la geometria.

Qualquiera cantidad numérica es, ó suma de unidades, y se llama *entero*, ó porcion de la unidad, y se llama *quebrado*, ó suma de unidades con porcion de unidad, y es *entero con quebrado.*

Los números denominados, como varas, pies, dedos; grados, minutos, segundos, &c, pueden considerarse como enteros con quebrados. Se tratará mas adelante de los quebrados, de los que se hace mencion ahora, solo para indicar el origen de

los

los números denominados.

Multiplicar un número por otro , y luego el producto por otro número , y assi con otros números , es lo mismo que multiplicar esse número por el producto de los dos , ó mas multiplicadores. Si 17. 4=68 y 68. 3=204 , será lo mismo multiplicar 17 por 4.3=12. Es evidente , que 17 está 4 véces en su producto por 4 ; esse producto está 3 veces en el nuevo producto por 3 , luego se toman tres veces quatro veces 17 , esto es , 12 veces , esto es , las veces que indica el producto de los dos multiplicadores.

El examen , ó prueba de la multiplicacion es la particion.

La *demonstracion* es síempre la explicacion de la operacion. Se multiplica todo el multiplicando por cada cifra á parte del multiplicadór. Se coge la cifra de las unidades de este que es la primera (se pudiera empezar por la última , y saldria lo mismo , teniendo el cuidado de escribir los productos parciales en su debido orden) y se multiplica por ella cada cifra del multiplicando , empezando por las unidades , y se escribe cifra por cifra el producto , sus unidades en coluna de unidades, sus decenas se han agregado al producto de la segunda cifra (ú de la cifra de decenas) del multiplicando , y las unidades de decenas se han escrito en la coluna de decenas , reservando las decenas de decenas , ó las centenas , para juntarlas con el producto de la tercera cifra , de las centenas del multiplicando , por la misma cifra del multiplicadór,

de

de cuya suma de centenas se han escrito las unidades, y se han reservado las decenas (de centenas, esto es, los miles) para juntar con el producto de la cifra siguiente del multiplicando (si la hai) &c, hasta la última en que se ha escrito todo el producto, unidades de aquel producto en su orden, y decenas si las hubo, en la coluna mas hácia la izquierda, luego se ha conseguido el formar el producto de todo el multiplicando, de sus unidades, de sus decenas, de sus centenas, &c, por las undades del multiplicadór.



Lo mismo se ha hecho con la segunda cifra del multiplicadór, y por expresar esa cifra decenas, la primera cifra del producto se ha colocado en la coluna de las decenas.

Lo mismo se ha practicado con la tercera cifra del multiplicadór, escribiendo la cifra del primér producto en la coluna de las centenas, por ser essa cifra expression de centenas, &c.

Assi se han formado los productos de todo el multiplicando, sus unidades, decenas, centenas, &c por todo el multiplicadór, sus unidades, centenas, decenas, &c, se han colocado essos productos particulares, unos debaxo de otros, cada cifra en la coluna de su expression legítima; se han sumado essos productos particulares. Luego la suma es el verdadero producto que se queria.

PAR-

PARTIR UN NUMERO POR OTRO.

PArtir un número por otro, es buscar quantas veces el uno contiene el otro; el que se parte es el *dividendo*. Aquél por el qual se parte, es el *partidor* ó *divisór*, y el número que expressa quantas veces, es el *quociente*.

Se escribe el dividendo; á un lado con separacion el divisór, y tirando una línea arriba del divisór, se escribirá el *quociente* conforme se fuere hallando; v.g si se ha de partir la cantidad 24080, por 26, se disponen ellas en la forma siguiente:

Dividendo. 24080	quociente.
	26 partidor.

Se toman en el dividendo (empezando desde la izquierda) tantas cifras, quantas hai en el partidór, si forman aparte un número que no sea menór que el partidór; pero si forman un número menór se toma una cifra mas; se señala un punto á la derecha de esta cifra en el exemplo propuesto, teniendo el partidór dos cifras, se toman dos en el dividendo, que consideradas aparte hacen 24; pero siendo la cantidad 24 menór que el partidór, 26 se toma en el dividendo una cifra mas que forma el número 240; se pone un punto á la derecha de esta tercera cifra; dícese en tonces: en 240 quantas veces cabe el número 26, se ve con alguna aten-

ci-

cion (y la práctica de los números lo facilita) que cabe 9 veces ; se esriben 9 en el quociente ; se multiplica el partidór por este quociente , y el producto 234 se escribe debaxo del dividendo 240 : se resta uno de otro , y quedan 6. Se toma una nueva cifra en el dividendo que es 8 , se señala un punto á su derecha , y se escribe al lado del resíduo formando nuevo dividendo parcial 68. En 68 , quantas veces el partidór 26 ? le cabe á 2 , que se escriben en el quociente , y multiplicando el partidór 26 por el nuevo quociente 2 , el producto 52 se escribe debaxo de 68 ; se resta y quedan 16. Se toma nueva cifra o del dividendo , se señala un punto , se escribe en el resíduo último , y se forma nuevo dividendo 160. En 160 , quantas veces el divisór 26 ? le cabe á 6 , que se escriben en el quociente ; 26 por 6 hacen 156 , que restados de 160 dexan 4 , y no habiendo mas cifras en el dividendo, queda la particion hecha , y el quociente es $926\frac{4}{26}$, escribiendose el resíduo con el partidór debaxo, uno y otro de menór forma , al lado del quociente , y es un quebrado de que se tratará mas adelante.

```
24080
 234        { 926 4/26
 ---        { --------
 068        { 26
  52
 ---
 160
 156
 ---
  04
```


Se

Se conoce por esta operacion, que el número 26 cabe 926 $\frac{4}{26}$ veces en 24080.

Si despues de tomada nueva cifra en el dividendo, y añadida al resíduo para formar nuevo dividendo parcial, no le cabe el partidór, se escribe o en el quociente, y se toma nueva cifra del dividendo, para formar nuevo dividendo parcial; por exemplo: se han de partir 2280960 por 324.

2280.9.6.0. { 7040 / 324
2268.
129.6.
00.

En 2280, que primero se tomará, cabe 7 veces el partidór 324, este por 7 hace 2268, y restados de 2280, quedan 12; tomo 9 del dividendo, y con el resíduo se forma nuevo dividendo 129. quantas veces le caben 324? ninguna; escribo o en el quociente; baxo nueva cifra, y formo 1296 por nuevo dividendo; 324 le caben quatro veces, pues el produćto de uno por otro es justamente 1296 luego la substraccion hecha queda o; baxo nueua cifra, que es o, y se forma nueva dividendo oo; en este, 24 no caben, luego escribo o en el quociente; y la particion esta acabada, siendo el quociente 7040.

Partir un número por otro, y luego el quociente por otro, y así en adelante los quocientes por otros divisores, es lo mismo que partir el número por el produćto de los dos, ó mas divisores.

Si

Si 204 : 3=68 y que 68 : 4=17 será lo mismo partir 204 por 12= 3. 4; pues si 17 caben 4 veces en 68, y 68 caben 3 veces en 204, es evidente el que 17 caben tres veces quatro veces, esto es, 12 veces, en 204, y que 204 partidos por 12 darán al quociente 17.

El multiplicar, y el partir se sirven mutuamente de prueba; v.g. para examinar si el producto de un número por otro es exacto, se partirá el producto por uno de los factores, y vendrá por quociente el otro factór, si la multiplicacion estuviere bien hecha; reciprocamente para examinar una particion, se multiplicará el quociente por el partidór, y el producto debe salir igual al devidendo. Habiendo un quebrado en el quociente, el número superiór de esse quebrado se añade al producto del quociente por el partidór, y deve salir el dividendo exacto, si la particion fuesse exacta.

La particion de números denominados, ó cantidades complexas, se executará de la misma suerte, reduciendo las cantidades á la menór espécie. Por los exemplos que se darán en la explicacion, se verá que se puede hacer tambien sin la reduccion total, quando el partidór es simple, partiendo primero la espécie mayór, y reduciendo el residuo, si le hubiere, á la próxima menór, y assí en adelante; pero la reduccion total es la regla general. El quociente que viene de la espécie menór se reduce á las espécies mayores con facilidad.

Demonstracion de la regla del partir. Pudiera darse la demonstrocion en el mismo méthodo que

la de las tres reglas antecedentes, como lo practican otros, pero no es legítima en quanto á la presente regla. En general, partir un número por otro, buscar quantas veces el divisór está en el dividendo, no es operacion que admita otra demonstracion mas de la operacion. Restar el divisór del dividendo, y el resíduo otra vez, y del nuevo resíduo otra vez, y assí siempre hasta que quede un resíduo menór que el divisór, luego sumar las veces que se ha restado, la suma es el quociente, y la division queda hecha, no siendo ella sino una mera substraccion repetida, como la multiplicacion una repetida adicion. Pero á esse méthodo tedioso se ha substituido una regla que hace la operacion mas breve, y admite essa regla su demonstracion para convencer de su buen efecto. Porque la division no se puede hacer de golpe, se hace por partes, empezando á partir el dividendo por la izquierda. Se cogen en él tantas cifras quantas tiene el divisór, y si ellas forman á parte un número menór que el divisór, se coge una cifra mas; se busca quantas veces el divisór cabe en esse primér dividendo parcial, y se escribe al quociente aquel número de veces. Esse primér quociente parcial no puede ser mayór que 9, ni tener por consiguiente mas de una cifra, pues de tener dos seria á lo menos 10, y entonces el dividendo parcial seria demasiado grande, y quitándole una cifra de la derecha le cabia el divisór una vez. Se multiplica el divisór por el quociente, y se resta el producto, del dividendo; lo que queda, si algo queda,

for-

formará con una nueva cifra del dividendo general un segundo dividendo parcial, y así en adelante un tercero,&c.

Pero essa cifra que se ha escito por quociente, que expressa ? son unidades, decenas, centenas, miles, &c? Lo determina una regla general que no se halla declarada con formalidad en los tratados Arithméticos que he visto.

En la division la cifra del quociente particulár es del mismo orden que la cifra mas hácia la derecha del dividendo particulár. v.g. En 30000 quantas veces 5 ? caben 6 veces, y serán 6000, por ser el cero del dividendo del orden de miles. En 30000 quantas veces 15? 2 veces, pero 2000 veces, por la misma razon. En 30000 quantas veces 150? No bastán 30 del dividendo 30000; es preciso coger tres cifras, y decir en 300 quantas veces 150? 2 veces, y porque el cero de hacia la derecha del dividendo parcial 300 se halla en el orden de centenas, será el quociente, 2 centenas de veces ó 200 veces.

La razón es, que el devisór ha de caber siempre en el dividendo, y que este se escoge para que sea assi, pero el dividendo es siempre del mismo orden que su cifra á la derecha, que puede considerarse, y con efecto se considera en esta ocasion de division parcial como una espécie particulár de unidades de aquel orden en que se halla en el dividendo total. Si expresa decenas de miles, será de unidades de decenas de miles, y la cifra que está hácia la izquierda será de decenas de decenas

de

de miles, la immediata será de centenas de decenas de miles, y todo el dividendo parcial expressa decenas de miles, consideradas como unidades, de la misma suerte que qualquiér cantidad numérica expresa siempre unidades, y por consiguiente partiendo essa cantidad por tal, ó por tal número, esto es en tantas, ó tantas partes, cada parte expressará aquellas mismas unidades, que todo el dividendo parcial, ó su primera cifra hácia la derecha.

Ahora para dar á esse quociente parcial su valór, y conservarle su orden, el mismo que él de la cifra del dividendo parcial, es preciso ponerle hácia la derecha tantas cifras de valór, ó no, quantas preceden en el dividendo total á la primera del dividendo parcial hácia la derecha; luego tendrá el quociente total tantas cifras quantas hay en el dividendo total contadas desde la primera cifra inclusive del primér dividendo parcial hácia la derecha; lo mismo sucederá en los demás quocientes parciales, luego cada quociente parcial podrá escribirse á parte con los ceros á la derecha que fueren necessarios para conservarle su orden, y la suma de essos quocientes parciales será el quociente total que se busca.

Se ha de partir la cantidad 32401512 por 54. Cogiendo 32 no le caben 54, y cero á la izquierda del quociente no hace número. En 324 caben 54 seis veces; escribo 6 en el quociente, y son centenas de miles, luego le pondremos cinco ceros á la derecha, y será esse primér quociente parcial 600000. El pro-

duc-

ducto de 6 por 54 es 324 igual al dividendo parcial, luego la subtraccion hecha queda o, y á haver sido el dividendo total

324.0151.2.	{600000
324 108	{ 20
0 432	{ 8
432	{600028
	{ 54

32400000, ya quedaba la division acabada, pero como es mayór se hace preciso partir también lo demás. Las otras cifras de valór que tiene son 1512. Digo en 15 no caben 54, pero en 151 caben 2 veces, y porque la primera cifra 1 de hácia la derecha de essotro dividendo parcial, expressa decenas, el quociente 2 las expresará también, luego escribo 2 decenas, esto es, 20 en el quociente debaxo del primér quociente, y en su orden, y el producto 108 de 54 por 2 restado del dividendo, quedan 43 decenas que no se pueden partir por 54, pero resolviéndolas en unidades serán 430, que con las dos unidades del dividendo total formarán nuevo dividendo parcial y el último, de 432 unidades. En este el divisór 54 cabe 8 veces, y son unidades, luego escribo 8 en el orden de unidades en el quociente, y el product de 54 por 8 siendo justamente 432, la subtraccion hecha no queda nada, y la division está acabada: se suman los quocientes parciales, y será el quociente total 600028.

Con esta operacion la misma que la que se ha enseñado es verdad decir, que se han partido todos los órdenes del dividendo por el partidór, y que los quocientes se han escrito en su debido orden

den, luego todo el dividendo se ha partido, y la regla que se ha dado para el partir, procura la operacion y el fin que se deseaba.

DE LOS DIVISORES, O PARTIDORES de una cantidad.

QUalquiera cantidad se puede dividir en qualesquiera partes iguales, ó desiguales entre sí; lo primero, porque qualquiér número puesto por dividendo puede tener qualquiér otro número por divisór, y el quociente será el valor de una de las partes iguales en que se divide el número. Lo segundo, por que dividida una cantidad en dos v. g. partes desiguales, una de las dos se puede dividir en tres, ó mas assí mismo desiguales, una de estas en quatro, ó mas tambien desiguales, &c, las partes iguales en que se divide una cantidad se llaman sus *aliquotas*, y un cierto número de ellas forman necessariamente, y justamente la cantidad. Otras iguales, ó desiguales entre sí, que llaman *aliquantas* son tales, que sumadas qualquier número que sea de ellas, nunca pueden igualar justamente la cantidad, siempre es la suma menór, ó mayór, con defecto, ó con excesso.

Distintas cantidades pueden tener partes aliquotas semejantes, ó las mismas, esto es, un mismo divisór, que las divida exactamente, y sin resíduo.

Assí las aliquotas, como las aliquantas pueden ser enteros, ó quebrado, ó enteros con que-

bra-

brado.

Pero á mas de esta division general própria de todas cantidades, hai otra particulár que solo es própria de algunas, y consiste en una, ó mas divisiones justas en enteros, de una misma cantidad.

Un número puede ser el producto de dos, ó mas factores, en números enteros, y por lo mismo ser partible exactamente y sin resíduo por uno ó por mas divisores, lo que se dice tambien tener distintas medidas. El número 60 se puede partir justamente por todos los números siguientes: 1; 2; 3; 4; 5; 6; 10; 12; 20; 30; 60; y dará por quociente los mismos números tomados al revés. Todos los números son partibles exactamente y en enteros, por 1, y por sí mismos, y si no tienen otros divisores, ú otras medidas exactas, y en números enteros, se llaman *números primos*. En tal caso lo son *de por sí* por haber otros que se llaman *primos entre sí*, quando comparados entre dos, entre tres, &c, no se les encuentra divisór alguno, medida alguna, comun, fuera de la unidad, aunque tenga tal vez cada uno tomado á parte otros divisores á mas de la unidad. 23 es número primo: 23 y 45 son primos entre sí por no tener medida alguna comun, aunque 45 tiene por divisores 5 y 9 fuera de la unidad, y de sí mismo. 20, y 49 tienen á parte, y cada uno sus divisores, el primero tiene 1; 2; 4; 5; 10; 20; el segundo tiene 1; 7; 49, pero ninguna de las medidas del uno(fuera de la unidad) puede ajustarse al otro; 21 y 49 no son primos entre sí, por-

que 7 los mide exactamente á entrambos. 8 ; 10; 15 ; son primos entre sí , aunque cada uno tenga várias medidas , y que tanto 8 y 10 , como 10 y 15 la tengan común.

En algunos casos es preciso hallar todos los divisores de una cantidad numérica; el méthodo es el siguiente.

Se dividirá la cantidad propuesta por su mínimo partidór (fuera de la unidad) y el quociente tambien por su mínimo partidór , y el nuevo quociente por su mínimo partidór , y assí en adelante , hasta que venga un quociente que no tenga otro divisór exacto que la udidad. Se notarán todos los divisores simples que se hubieren empleado , y estos serán los divisores simples de la cantidad ; luego se multiplicarán entre sí de dos en dos, de tres en tres, de quatro en quatro, &c, y formarán los divisores compuestos , y unos con otros serán todos los divisores que se buscan. v.g. se piden los divisores de 150 ; le divido en 2 , que se escribe á un lado , y el quociente 75 pongo debaxo de 150 ; divido 75 por su menór divisór 3, que pongo al lado , y el quociente 25 debaxo de 75 ; divido 25 por su menór divisór 5 , escribo 5 á un lado , y el quociente 5 debaxo de 25 ; divido 5 por su menór divisór 5 , que escribo al lado , y el quociente 1 debaxo del 5 quociente ; ya este 1 no tiene divisór mas de la unidad , luego los divisores simples de 150 son 2 , 3 , 5 , y 5. Se multiplica el primero 2 por el segundo 3 , y el producto 6 se escribe al lado de 3 ; luego se multiplican

can los primeros simples, y el compuesto ya adquirido, por el tercero simple 5, y se escriben á su lado los produĉtos 10; 15; 30. De la misma suerte se multiplican todos los simples, y compuestos ya adquiridos por el quarto simple 5, y los produĉtos (fuera de los ya logrados con el 5 de arriba) 25; 50, 75; 150, se pondrán al lado de aquel último divisór simple 5; de esta suerte se tendrán todos los divisores simples, y compuestos del número 150.

150	2
75	3; 6
25	5; 10; 15 :30
5	5; 25; 50 :75 : 150
1	

Demonstracion.

Los divisores simples, y compuestos que por esta operacion se han hállado, son divisores de la cantidad propuesta, y no hay otros, es lo que se debe demonstrar.

Que sean divisores es evidente, pues con efeĉto dividen justamente la cantidad, y de no dividirla no se hubieran admitido. O bien la dividen á ella, ó bien á sus quocientes, y es lo mismo uno que otro; porque el quociente está en la cantidad un cierto número de veces, luego el divisor exaĉto del quociente estará en la cantidad esse mismo número de veces multiplicado pot el divisór primero de la cantidad que ha ocasionado el primér quociente. Partiendo 150 por 2, el quociente es 75; si el número 3 es divisór exaĉtò de 75,

 tam-

también lo será de 150, que son dos veces 75. Porque 3 hallandose 25 veces en 75, y 75 dos veces en 150, se sigue, que esse divisór 3 se hallará dos veces 25 veces en 150: y assí de los demás divisores que se hallan. No se hallarán otros porque dividiéndose la cantidad, y sus quocientes que van siempre de mayór á menór por sus mìnimos divisores, se llega á la unidad que no tiene otro divisór entero mas de la unidad misma; luego se han hallado todos los divisores menores de los quocientes, esto es, todos los simples, y por la multiplicacion entre sí, todos los compuestos de la cantidad propuesta, baxando desde ella por sus partes aliquotas en enteros hasta la unidad.

DE LA COMPOSICION DE LOS SIGNOS mas y menos en las operaciones de Aribtmética.

LLamo composicion de signos $+$ y $-$ el signo que se debe atribuir á la cantidad que resulta de una operacion sobre cantidades afectadas de essos signos, sean los mismos, ó sean diferentes: essas cantidades son positivas, ó negativas como las hemos distinguido pagina 4. Distincion natural y que tiene lugar en todo lo que es capáz de mas y de menos. El caudal de uno es cantidad positiva, sus deudas son cantidad negativa; y si debe 10000 pesos sin tener nada suyo, tiene un caudal solamente negativo, $= 0 - 10000$ pesos. Si en un camino que se debe andar del Sur para el Norte se camina alguna porcion de Norte á Sur, esta

por-

porcion de camino andado es negativa , respecto del otro camino. Casos hai en la navegacion en que sucede esso mismo, quando (por exemplo) una fuerte corriente lleva un Navio contra el impulso del viento sobre las velas.

Para sumar números afectados del mismo signo, todos positivos, ó todos negativos, se suman los números, y se afecta la suma del mismo signo:

$+15+9+4$ hacen $+28$

$-15-9-4$ hacen -28

Si son afectados de signos contrários, unos positivos; y otros negativos, se suman á parte los de un mismo signo, los positivos, y tambien aparte los negativos; se saca la diferencia de la una suma á la otra, y el resíduo es la verdadera suma con el signo de la mayór suma particulár.

Se han de sumar $5-22+17-3-8+9-13$

las positivas hacen $+31$

las negativas . . . . -46

diferencia. . . . . . -15 negativa, verdadera suma de las cantidades propuestas.

Para restar un número de otro, ambos con el mismo signo, se toma la diferencia entre los números, y si él que se resta es menór, la diferencia afectada del mismo signo es el verdadero resíduo. Si el que se resta es mayór, la diferencia afectada del signo contrário es el resíduo.

de + 10	de − 10	de + 3	de + 10
rest. + 3	rest. − 3	rest. + 10	rest. − 3
queda. . . + 7	qued. − 7	qued. − 7	qued. + 13

de − 10	de + 3	de − 3
rest. + 13	rest. − 10	rest. + 10
qued. − 23	qued. + 13	qued. − 13

Si los signos son contrários se suman los dos números, y la suma (que es el verdadero resíduo) tendrá siempre el signo de la cantidad de la qual se resta, sea ella la mayór, sea la menór. Véanse los exemplos que se acaban de dar.

En general, para sumar, escribir todas las cantidades, una despues de otras con sus própios signos, y hacer la reducción de las que se destruyén, ó están en la misma suma, una con +, otra con −.

Para restar, escribir las cantidades de la própria suerte una despues de otra; la de la qual se resta con sus mismos signos, la que se resta con signos contrários, á los que tiene, y reducir como en el sumar.

En la multiplicacion y en la division la regla es mas facil. Si los números que se han de multiplicar ó partir uno por otro, tienen signos semejantes el producto ó el quociente tiene el signo +, es positivo: si contrários, tiene el signo −, es negativo.

$$-3+4=-12\ ;\ y\ -5.-7=+35\ ;$$
$$+35:-7=-5\ ;\ -12:-3=+4.$$

Demonstracion de esas reglas. Sumar cantidades positivas ó negativas da sin duda una suma positiva en el primér caso, negativa en el segundo. Sumar positiva con negativa es evidente que se destruyen en el todo ó en parte, y que la suma después de la necessária reduccion debe tener el signo de la espécie mayór.

En la substraccion es assimismo evidente, se debe escribir la cantidad que se ha de restar con signo contrário, respecto de aquel que tiene. Pues restar una positiva es negarla, y restar una negativa es afirmarla. Esto supuesto la reduccion dará el verdadero resíduo.

En la multiplicacion, positivo por positivo es afirmar tantas veces una afirmacion, el producto es positivo. Luego positivo por negativo, negativo por positivo, es negar una afirmacion, ó afimar una negacion, uno y otro producen negativo. Pero multiplicar negativo por negativo, es negar una negacion, es afirmar tantas veces; el producto debe ser positivo.

En la divísion, partir positivo por positivo, el quociente es poritivo sin dificultad; partir positivo por negarivo, ó negativo por positivo, es buscar quantas veces una cantidad negativa está contenida en una positiva, ó una positiva en una negativa, lo que no puede ser sino es negativamente. -2 en $+6$ no caben solo negativamente, -3 veces. Pero si se parte negativo por negativo, el quociente debe ser positivo, pues afirma el que una cantidad negativa está en efecto y positi-

va-

vamente tantas veces contenida en otrá cantidad negativa, ambas de una misma condicion de cantidad.

DE LOS QUEBRADOS.

EN la práctica de la division se manifiestan ordinariamente á los principiantes los *quebrados*; pues no siendo la division exacta, esto es quedando un resíduo siempre menór que el partidór, después de hecha la operacion se escribe en la forma que se ha dicho, y es un quebrado. Pero el orígen de los quebrados es muy distinto; pues en general es la comparacion de un número con otro v.g. la comparacion de 1 con 2 se escribe $\frac{1}{2}$; la de 3 con 7 se escribe $\frac{3}{7}$ la de 9 con 4 se escribe $\frac{9}{4}$, &c, y se expresan con estas palabras: *un médio*, *tres septimos*, *nueve quártos*, &c, El número superiór es el *numeradór*, y el inferiór el *denominadór*; y assí la misma operacion de la particion, que es una comparacion de un número con otro, se expressa en general con un quebrado, escribiendo por numeradór el dividendo, y el partidór por denominadór, y este quebrado es el verdadero quociente, aunque muchas veces no reducido á su menór expression. Partiendo 27 por 9 el quociente es $\frac{27}{9}$ y en muchas ocasiones esta expression basta sin otra operacion. Mas adelante se dará otro nombre á esse methodo de partir.

Si el numeradór es menór, igual, ó mayór que el denominadór, el quebrado es menór, igual,

ó mayór que la unidad, ó que un entero, y el valór del quebrado respecto de la unidad ó de un entero, solo pende de la comparacion del numeradór á su denominadór. Si el numeradór es la mitad, v.g. del denominadór, el quebrado es la mitad de un entero.

Si el numeradór contiene el denominadór tres veces y media, el quebrado valdrá tres enteros y médio, pero la misma comparacion del numeradór al denominadór puede ser expresada por infinitos números distintos uno de otro; v.g. si el numeradór de un quebrado es la quarta parte del denominadór, hai infinitas expresiones de números tomados de dos en dos, de los quales uno será la quarta parte del otro. Como $\frac{1}{4}$ $\frac{2}{8}$ $\frac{3}{12}$ $\frac{4}{16}$ $\frac{25}{100}$, &c, y cada uno de estos quebrados es igual á una quarta parte de un entero; y todas son iguales entre sí. Luego puede un quebrado expresarse de infinitos modos sin mudar de valór, pero con números mayores unos que otros. La primera operacion en la práctica sobre quebrados, es pues la de reducirlos á la expression menór, por consiguiente mas semple que fuere posible. $\frac{25}{100}$ vale una quarta, esto es $\frac{1}{4}$, que es el mismo quebrado reducido á mínimos terminos.

REDUCIR UN QUEBRADO A SUS minimos términos.

Consiste la operacion en buscar un número, y el mayór posible, que parta sin resíduo, ó sea común medida de los dos números que forman el quebrado; para esto se parte el denominadór por el numeradór, y sin reparar en el quociente, se ve si queda algo, ó si no queda nada. Si no queda, el partidór mayór que se busca es el mismo numeradór, y los quocientes del numeradór y del dominadór, partidos por el numeradór, son los términos del quebrado reducido á su mínima expression. $\frac{22}{154}$ se reducirá á $\frac{1}{7}$, porque 154 partidos por 22, da 7, y no queda nada: luego 22 mide exactamente assí el numeradór 22 (qualquiera cantídad está en sí misma una vez) como el denominadór 154. Los quocientes son 1 y 7 que constituyen el quebrado reducido á minimos términos $\frac{1}{7}$ igual á $\frac{22}{154}$.

Aquí se supone el quebrado menór que un entero ó que la unidad. Pero si fuese mayór como $\frac{154}{22}$, la regla será partir el número mayór qor el menór, y se hallará el quebrado $\frac{7}{1} = \frac{154}{22}$ reducido á sus minimos términos y en forma de quebrado.

Si hai un resíduo, se dividirá el partidór último por aquel resíduo; y si en esta segunda particion no hai nuevo resíduo el nuevo partidór, es el partidór común que se busca; si le hai, pártase siempre el último partidór por el nuevo resíduo, y prosígase assí hasta encontrar una particion sin resíduo, de la qual el partidór será el mayór partidór

que

que se busca. v.g. para reducir $\frac{72}{180}$ á sus menores términos, parto 180 por 72, viene el quociente 2 y quedan 39; parto 72 por 36 vienen al quociente, 2, y no queda nada: luego 36 es el número que partirá sin resíduo el numeradór y el denominadór del quebrado dado; y hechas estas dos particiones, los quocientes 2, 3 darán nuebo quebrado $\frac{2}{3}$ reducido á sus mínimos términos.

De la misma suerte para reducir $\frac{884}{1547}$ á sus mínimos términos, partiré 1547 por 884, el quociente es 1 y quedan 663; partiré 884 por 663, el quociente es 1 y quedan 221: partiré 663 por 221, el quociente es 3, y no queda nada. Luego 221 es el partidór exacto; y partiendo por el los números del quebrado dado $\frac{884}{1547}$, saldrán 4 y 7, que formarán nuevo quebrado $\frac{4}{7}$ igual al primero reducido á sus mínimos términos.

No siempre se puede redúcir un quebrado á números menores, v.g. quando no tienen los dos números que le forman otra comun medida que la unidad que mide á todos los números, y es lo mas ordinário: en esse caso se queda el quebrado reducido de por sí á los mínimos términos possibles, y los números son primos entre sí, como lo hemos dicho. Tal es el quebrado $\frac{71}{100}$.

Demonstracion. Encontrándose una medida común al numeradór y al denominadór, y partiendo essos nùmeros por essa medida, los quocientes expressarán en términos menores una misma relacion entre sí, que la que habia entre los dívidendos; y por consiguiente el nuevo quebrado for-

mado con essos quocientes, valdrá lo mismo, por sér el valór de un quebrado la relacion entre los dos números que le constituyen. $\frac{35}{56}$ es un quebrado cuyos números tienen una medida común 7; luego partiendolos por ella, saldrá el nuevo quebrado $\frac{5}{8}$ igual al primero. Para hallar essa medida común y la mayór possible, es menestér partir el denominadór por el numeradór, ó por úna aliquota del numeradór, y si una ú otra division se puede hacer, será reducible, y se reducirá el quebrado á menór expresion. Esto mismo enseña la regla; luego procura lo que se pide.

REDUCIR DOS O MAS QUEBRADOS A UN común denominadór.

SE multiplican los denominadores entre sí, y el producto será el denominadór común á todos los quebrados que se quieren reducir; luego se multiplica el numeradór de cada quebrado por todos los denominadores, menos el suyo, y el producto será el numeradór nuevo del quebrado igual al primero cuyo numeradór se ha multiplicado, y assí para los demás quebrados. v.g. se proponen los tres quebrados $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{4}{7}$ para reducirlos á una misma denominacion; digo 2 por 3 son 6, y 6 por 7 son 42; este número 42 es el dominadór común. Luego 1 el númeradór del primér quebrado se multiplica por 3, y hace 3 y el producto por 7 es 21.

Este es el numeradór del nuevo quebrado $\frac{21}{42}$ igu-

igual á $\frac{1}{2}$. Del mismo modo, 2 numeradór del segundo quebrado por 2 son 4, y 4 por 7 son 28, que es el numeradór del segundo quebrado $\frac{28}{42}$ igual al producto $\frac{2}{3}$: finalmente 4 por 2 son 8, y 8 por 3 son 24, y vienen $\frac{24}{42}$ iguales á $\frac{4}{7}$ y los tres nuevos quebrados siendo iguales á los tres propuestos, tienen una misma denominacion.

Los quebrados reducidos á un mismo denominadór no por esso están reducidos á mínimos términos, y tal vez, pero rara, se podrán reducir, v.g. $\frac{3}{4}$ $\frac{7}{12}$ $\frac{5}{18}$ reducidos á un común denominadór serán $\frac{648}{864}$ $\frac{504}{864}$ $\frac{240}{864}$. Ahora la mayór medida común entre 648 y 864, es 216; entre 216 y 504, es 72; entre 72 y 240, es 24: luego 24 mide exactamente todos estos números, y por consiguiente partiendo todos por 24, vendrán tres nuevos quebrados reducidos á un mismo denominadór, y justamente á sus mínimos términos entre sí $\frac{27}{36}$ $\frac{21}{36}$ $\frac{10}{36}$; digo *entre sí*, porque cada quebrado tomado á parte pudiera aún reducirse á menores términos, v.g. $\frac{37}{36}$ se reducirán á $\frac{3}{4}$, pero no tendrán la condicion de un denominadór común.

Demonstracion. Hemos visto que partiendo los dos números que constituyen un quebrado por una común medida, por un mismo divisór, los quocientes forman un nuevo quebrado igual al primero. Si en lugar de dividirse, se multiplican por un mismo número, los productos formarán un nuevo quebrado tambien igual al primero. Esto es lo que se hace en esta operacion. En los tres quebrados $\frac{1}{2}$ $\frac{2}{3}$ $\frac{4}{7}$ se multiplican 1, 2, del primér quebra-

brado por 3, y los productos por 7, y forman los productos el nuevo quebrado $\frac{21}{42}$. Se multiplican 2, 3, del segundo quebrado por 2, y luego por 7, y forman los productos el nuevo quebrado $\frac{28}{42}$. Se multiplican en fin 4, 7 del tercér quebrado por 2, y luego por 3, y los productos forman el nuevo quebrado $\frac{24}{42}$. Es cierto que los tres nuevos quebrados son iguales respectivamente á los tres que se han propuesto, por haberse multiplicado los dos términos de cada uno de ellos por el mismo ó por los mismos números. Pero con la operacion se han multiplicado con efecto los tres dominadores entre sí á cada mutacion, lo que siempre ha dado el mismo denominodór; luego con la regla dada los tres quebrados sin mudar de valór se han reducido á una misma denominacion.

REDUCIR UN ENTERO O UN QUEBRADO á otro quebrado de demominadór dado, y un quebrado de quebradó á un quebrado simple.

I SE reduce ó se transforma un entero en un quebrado de denominacion dada, multiplicando el entero por el denominadór dado, y el producto es el numeradór del quebrado, cuyo denominadór se ha dado. 7 enteros se reducirán á quintos, multiplicando 7 por 5 que hacen 35, y el quebrado $\frac{35}{5}$ es igual á 7 enteros. Para reducir 15 á 33-avos, 15 por 33 hacen 495; el denominadór dado es 33, luego $\frac{495}{33}$ es quebrado igual á 15 enteros.

II Un quebrado $\frac{3}{4}$ se reduce á otro quebrado de denominadór dado; v.g. 24-avos multiplicando el numeradór 3 por el denominadór dadô 24, y partiendo el producto 72 por el denominadór del quebrado propuesto, en este exemplo por 4; el quociente 18 es el numeradór del nuevo quebrado $\frac{18}{24}$, que es igual á $\frac{3}{4}$.

III Los quebrados de quebrados, ó quebrados compexos se expresan de distintos modos. *Por exemplo.*

1°. $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ dos tércios de três quartos.

2°. $\frac{\frac{2}{3}}{7}$ dos tercios de siete-avos.

3°. $\frac{2\frac{3}{4}}{3}$ dos y tres quartos tercios,

4°. $\frac{2\frac{3}{4}}{\frac{3}{7}}$ dos y tres quartos terciós de siete-avos.

Para reducir el primero á un quebrado simple se multiplican los numeradores entre sí, y el producto es nuevo numeradór. Se multiplican assímismo los denominadores entre sí, el producto es nuevo denominadór del quebrado simple, igual al complexo, y serán $\frac{6}{12}$ que se reducen á menores terminos $\frac{1}{2}$.

Del mismo modo $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ de $\frac{6}{7}$ se reducirán mulplicando 2 por 3, y el producto por 6 que hacen 36 por numeradór; luego 5 por 4, y el producto por 7 hacen 140 por denominadór, lo que dará el quebrado $\frac{36}{140}$ que se reduce á mínimos términos $\frac{9}{35}$.

El

El segundo quebrado [illegible] es lo mismo que $\frac{1}{7}$ de $\frac{5}{3}$ del número 1°.

En el tercer quebrado $\frac{2\frac{3}{4}}{3}$ se reduce el numerador 2^3 considerado como entero y quebrado, á un quebrado solo, y hace $\frac{11}{4}$. Son pues $\frac{11}{4}$ que se han de partir por 3, ó $\frac{\frac{11}{4}}{3}$, esto es $\frac{1}{3}$ de $\frac{11}{4}$: luego se reducitá multiplicando los numeradores entre sí; 1 vez 11 es 11 por nuevo numeradór, y los denominadores estre sí, 3 veces 4 son 12 por nuevo denominadór, y saldrá el quebrado $\frac{11}{12}$ igual á $\frac{2\frac{3}{4}}{3}$.

En el quarto quebrado $\frac{\frac{2\frac{3}{4}}{3}}{7}$ se deduce el numeradór $\frac{2\frac{3}{4}}{3}$ como en el número 3°. y hace $\frac{11}{12}$ que se han de partir por 7, ó $\frac{1}{7}$ de $\frac{11}{12}$: luego como número 1°. se reducirá á $\frac{11}{84}$.

Demonstracion de las operaciones de este artículo.

I Qualquiér número entero puede considerarse como un quebrado, cuyo numeradór es el mismo número, y el denominadór es la unidad. 7 del exemplo $= \frac{7}{1}$ porque $7 : 1 = 7$. Pero el quebrado $\frac{7}{1}$ se reducirá á 5-avos, multiplicando el numeradór y el denominadór por 5. que hará el nuevo quebrado igual al primero, esto es al entero, $\frac{35}{5}$.

II Un quebrado $\frac{3}{4}$, multiplicados sus terminos por 24, se transformará en otro quebrado igual $\frac{72}{96}$; pero se quiere que sea el denominadór 24, luego no se dabia multiplicar el denominadór 4 por 24, ó bien se deben partir los términos del nuevo que-

bra-

brado $\frac{72}{96}$ por 4, lo que dará $\frac{18}{24}$, y por excusar una multiplicacion se dexa la denominacion dada, y se parte por el denominadór del quebrado el prod ucto de su numeradór por la denominacion á que se debe reducir el quebrado.

III Los $\frac{2}{3}$ de 1 son $\frac{2}{3}$; los $\frac{2}{3}$ de 3 son tres veces los $_3$ de 1, esto es $\frac{6}{3}$: luego para tomar de un entero una cierta porcion, expresada por un quebrado, basta multiplicar el numeradór del quebrado por el entero, y el nuevo quebrado es la porcion que se desea; pero si el entero se halla de por sí partido por otro número, es preciso partir el nuevo quebrado ya formado, por aquel divisór del entero, esto es, por el producto del partidór del quebrado, por el partidór del entero; esto es, por el producto de los dos denominadores; y assi $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ serán $\frac{6}{12}$.

Este mismo razonamiento se aplica á los últimos quebrados del articulo IV, qne en efecto se reducen al 1° como se ha dicho en la operacion.

SUMAR QUEBRADOS.

Se reducirán los quebrados dados á un mismo denominadór: se sumarán los nuevos numeradores, y la suma será el numeradór del quebrado que se busca por suma de los propuestos.

El denominadór será aquel denomiradór común que ya se halló; *por exemplo*, se pide la suma de $\frac{1}{2}$, $\frac{2}{3}$, $\frac{3}{4}$, se reducen estos tres quebrados á otros tres iguales *respective* que tengan una misma deno-

minacion, y son $\frac{12}{24}\ \frac{16}{24}\ \frac{18}{24}$. La suma de los tres numeradores 46 será el numeradór de la suma que se pide: el denominadór es 24, luego $\frac{46}{24}$ es la suma pedida, que es igual á $1\frac{11}{12}$.

RESTAR QUEBRADOS.

SE reducirán á un mismo denominadór; se restará el numeradór del quebrado que se ha de restar (que debe ser el menór, y de no serlo, ó será la subtraccion imposible, ó el resíduo negativo de lo que no se trata ahora) del otro numeradór, y el resíduo será el numeradór de un nuevo quebrado, cuyo denominadór será el común ya hallado. Este nuevo quebrado será el resíduo que se pide; v.g. para restar $\frac{2}{3}$ de $\frac{3}{4}$ se reducirán á $\frac{8}{12}\ \frac{9}{12}$. 8 restados de 9 queda 1, luego queda $\frac{1}{12}$ por el resíduo pedido.

Del mismo modo para restar $\frac{5}{7}$ de $\frac{17}{21}$, se transformarán en $\frac{105}{147}\ \frac{119}{147}$, y restando el menór del mayór quedarán $\frac{14}{147}$, y reduciendo á mínimos términos $\frac{2}{21}$.

MULTIPLICAR QUEBRADOS ENTRE SI.

SE multiplican los numeradores entre sí, y el producto es el numeradór,

Luego se multiplican los denominadores entre sí, y el producto es el denominadór. Estos númeradór y denominadór forman un quebrado, que será el producto pedido. v.g. para multiplicar $\frac{2}{3}$ por

$\frac{3}{4}$

$\frac{3}{4}$ se dirá : 2 por 3 hacen 6 , y 3 por 4 hacen 12, luego $\frac{6}{12} = \frac{1}{2}$ es el producto de $\frac{2}{3}$ por $\frac{3}{4}$. Assímismo $\frac{5}{7}$, $\frac{3}{8}$, $\frac{2}{3}$ multiplicados entre sí , dan por producto $\frac{30}{504}$, que se reducen á $\frac{5}{84}$.

El producto por quebrados , como sean menores que la unidad , es siempre menór que qualquiera de los quebrados factores ; pues tomando un quebrado una vez , seria el producto igual al quebrado ; luego tomandole menos de una vez , dará un producto menór que qualquiera de los factores; v.g. $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{2}$ hace $\frac{1}{4}$, &c.



PARTIR UN QUEBRADO POR OTRO.

SE permutan los términos del partidór , y se multiplican los dos quebrados , el dividendo por el partidór permutado ; el producto es el quociente que se busca. *Por exemplo* : se han de partir $\frac{7}{8}$ por $\frac{3}{4}$: del partidór $\frac{3}{4}$ hago otro quebrádo $\frac{4}{3}$: multiplico $\frac{7}{8}$ por $\frac{4}{3}$ y el producto $\frac{28}{24}$ es el quociente de $\frac{7}{8}$ partidos por $\frac{3}{4}$ este quociente $\frac{28}{24}$ se redcuirá á $1\frac{1}{6}$.

En la particion de quebrados regulares , esto es , menores que la unidad , el quociente es siempre mayór que el dividendo , pues el producto del quociente por el partidór debe ser igual al dividendo ; pero , como hemos dicho , el producto de dos quebrados es siempre menór que qualquiera de los factores : luego el dividendo que es el producto , debe ser menór que el quociente , que es uno de los factores : $\frac{1}{2}$ partido por $\frac{1}{2}$ da al quociente 1 entero, $\frac{1}{2}$ por $\frac{1}{4}$ da al quociente 2 , &c.

LAS QUATRO OPERACIONES CON ENteros, y quebrados.

HEmos dicho ya que un entero se reduce á un quebrado con hacerle numeradór, y poner debaxo la unidad, 7 enteros $=\frac{7}{1}$ y assí de los demás; luego las operaciones con los quebrados servirán para los enteros y quebrados reduciendo aquellos á la forma de quebrados. De otro modo, y sin essa reduccion.

Se suma un entero con un quebrado escribiendolos juntos, el entero á la izquierda ó primero, y el quebrado á su lado; 12 y $\frac{3}{5}$ se escriben $12\frac{3}{5}$, y es la suma de ambos.

Se resta un quebrado (que se considera menór que 1) de un entero, tomado del entero 1, que se reduce á un quebrado de la misma denominacion que aquel que se ha de restar, y restando el numeradór de este, del numeradór de aquel, se escribe el resíduo por numerádór nuevo, con el mismo denominadór, y á la izquierda el entero menos 1 que se ha tomado. De 12 se han de restar $\frac{3}{5}$; es lo mismo que restar $\frac{3}{5}$ de 11 $\frac{5}{5}$; el residuo es $11\frac{2}{5}$.

Se multiplican entre sí entero y quebrado con multiplicar el numeradór del quebrado por el entero; el producto es el numeradór de un nuevo quebrado de la misma denominacion, que es el producto que se pide. $\frac{3}{5}$ por 12 ó 12 por $\frac{3}{5}$ hacen $\frac{36}{5}$: el producto se reduce á enteros, ó á menór expres-

sion

sion si se quiere.

Para partir un entero por un quebrado, se multiplica el entero por el denominadór del quebrado, y partiendo el producto por el numeradór es el quociente el de la division del entero por el quebrado. 12 se han de partir por $\frac{3}{5}$; se parte por 3 el producto 60 de 12 por 5, y el quociente 20 es el de 12 partidos por $\frac{3}{5}$. Si es el quebrado el que se ha de partir por el entero, se multiplica el denominadór por el entero, y el producto es el denominadór de un nuevo quebrado, que con el mismo numeradór es el quociente del quebrado partido por el entero; $\frac{3}{5}$ partidos por 12 dan por quociente $\frac{3}{60}$.

Demonstracion. de las quatro reglas, sumar, restar, multiplicar y partir quebrados, y enteros con quebrados.

Las dos primeras no necesitan demonstracion: siendo los mismos los denominadores, despues de la reduccion á una misma denominacion, se suman los numeradares, ó se resta uno de otro como en números enteros.

La demonstracion de la regla de la multiplicacion, es la misma que se ha dado num° III, porque en efecto ambas operaciones no son mas de una berdadera multiplicacion.

La regla del partir se demonstrará assí con el mismo exemplo que ha servido en la operacion. Se han de partir $\frac{7}{8}$ por $\frac{4}{3}$. Supongamos que $\frac{7}{8}$ se han de partir primeramente por 3 enteros; luego se multiplicarán 8, denominadór del quebrado, por 3, y será el producto 24 denomenador del quebrado

do $\frac{7}{24}$, que será el qociente de $\frac{7}{8}$ partidos por 3. Pero ya no se han de partir $\frac{7}{8}$ por 3, sino es por 3 partidos por 4 esto es por $\frac{3}{4}$. Y assí el producto 24 formado de 8 muliplicados por 3 se debe partir por 4, porque uno de los factores debia ser partido por 4. Luego en lugár de 24 tendremos por verdadero denominadór 6, y por verdadero quociente $\frac{7}{7}$; pero como en esta última division ha de venir las mas veces un número mixto de enteros con quebrado, en lugár de partir el denominadór 24 por 4 se multiplica el numeradór 7 por esse mismo número 4, lo que da siempre un número entero, hace el mismo efecto, pues es lo mismo que multiplicar numeradór y denominadór de un quebrado por un mismo número, que aumenta las cifras pero no el valór; luego para partir un quebrado por otro, es menestér multiplicar el numeradór del uno por el denominadór del otro; lo que se llama multiplicar en cruz, y se señala así $\frac{7}{8} \times \frac{3}{4}$, ó bien transformar el quebrado divisór, y hacer la operacion que hemos puesto arriba.

Las reglas de enteros con quebrados son las mismas que las de quebrados, y assimismo sus demonstraciones.

DE

DE LAS POTESTADES Y DE SU FORmacion De las Raices y de su Extraccion.

UN número qualquiera entero ó quebrado, &c, considerado en sí, está en su primera *potestad*: si se multiplica por sí mismo, el producto es la segunda potestad, ó el *quadrado* de esse número; si esse quadrado se multiplica por el mismo número, el nuevo producto es la tercera potestad ó el *cubo*: si esse cubo se multiplica por el mismo número, se formará la quarta potestad, y assi en adelante la quinta, la sexta, &c.

El número que se considera como primitivo, es la *raiz* de aquellas sus potestades, segunda ó *quadrada*, si se considera respecto del quadrado; tercera ó *cubica*, si respecto del cubo; quarta, respecto de la quarta potestad, &c.

Tómese por exemplo el número 5.

5. primera potestad.
25. segunda potestad, ó quadrado.
125. tercera potestad ó cubo.
625. quarta potestad.
3125. quinta potestad, &c.

Las potestades y sus raices, muchas veces solo se indican, v.g. el quadrado de 375 en esta forma $\overline{375.}^2$ su cubo en esta $\overline{375.}^3$ su 4.ª en esta $\overline{375.}^4$ &c. El número superiór, que indica la potestad se llama *exponente*. Las raices por un signo $\sqrt{}$ que llaman *signo radical*, puesto antes del número, con otro número menór que se escribe encima

y

y es el *exponente* de la raiz, v. g. $\sqrt[2]{144}$, indica la raiz quadrada de 144; $\sqrt[3]{12167}$, indica la raiz cubica de 12167, &c; y no habiendo exponente encima del signo radical, es siempre la raiz quadrada. El número ó la cantidad, que está immediata y á la derecha del signo radical, se dice cantidad *debaxo del signo*. ó *puesta debaxo del signo*; la que la compaña á la izquierda está *fuera del signo*; es cantidad multiplicada por la raiz indicada de la otra cantidad puesta debaxo; si esta es de muchas cifras, compuesta de varias cantidades con los signos + ó — se extiende el ramo derecho del signo radical sobre toda la cantidad, v,g.------ $\sqrt{26+17-2}$.

Tambien se indica sin signo radical, con solo poner encima de la cantidad una línea, y á su derecha un quebrado, cuyo numeradór es la unidad, el denominadór el mismo exponente de la potestad ó de la raiz; $31^{\frac{1}{2}}$ indica la raíz quadrada de 31, y es lo mismo que $\sqrt[2]{31}$. Assí mismo $300.^{\frac{1}{3}}$ indica la raiz cúbica de 300, &c.

Todos los números, esto es todas las raices y patestades, fluyen de la unidad, y qualquier numero es ya potestad de sí mismo, multiplicado por la unidad, y por esso está de por sí en su primera potestad como lo hemos dicho; v.g. 5, es $5.^{1}$ y se pudiera escribir 5^{1}; y del mismo modo todos los números, que se suponen siempre tener el exponente 1, pero en ninguno se escribe por inutil, y por ser

ser de esencia en todos, á diferencia de los demas exponentes que se escriben por accidentales; y por que se sepa quando un número es otra potestad que la primera.

Pero si un número tiene por exponente o, ya es igual á la unidad; 2^0; 100^0; 3954^0; y otro qualquiera con el exponente o es $=1$. Este princípio nos ha de servir mas adelante y assí le demonstraremos, escogiendo el méthodo sigiente.

Un número elevado á una potestad, siendo multiplicado por el mismo número elevado á la misma ú otra potestad, es igual ú da por producto el mismo número elevado á una nueva potestad, que es la suma de las dos potestades dadas ó cuyo exponente es la suma de los dos exponentes dados $5^2 \cdot 5^3 = 5^{2+3} = 5^5$, pues es lo mismo que 25. 125, que hacen 3125, quinta potestad de 5, porque el cubo de 5 que es 125 multiplicado por el quadrado de 5 es 25, es lo mismo que esse cubo multiplicado por la raiz 5, y el producto 625 multiplicado por la misma raiz 5; siendo una misma cosa multiplicar por un quadrado, ó multiplicar por la raiz de esse quadrado, y otra vez por la raiz de esse quadrado; y porque los exponentes no indican con sus unidades mas que el número de veces que se ha de multiplicar cada producto potencial por la raiz, empezando desde la unidad, multiplicar 5^3 por 5^2 es decir, qne 5^3 se ha de multiplicar una vez por 5 la raiz, y el producto otra vez por 5 la raiz; es dedir, que 5^3 ya formado

 con

con tres multiplicaciones de la raiz 5 por cada producto, desde la unidad, es á saber, una vez por 1 lo que da 5 por producto, otra vez por este producto 5 queda 25, otra vez por este producto 25, que da 125; debe ser multiplicado otra vez por esse producto 125, lo que dará 625, y otra vez por esse producto 625, que dará 3125; luego son cinco veces las que se debe multiplicar la raiz, por la unidad, por 5, por 25, por 125, por 625, que es lo mismo que la quinta potestad de esta misma raíz.

Al contrario y por el mismo méthodo, un número elevado á una potestad, partiendose por el mismo número elevado á la misma, ó á otra ponestad, da por quocíente el mismo número elevado á una nueva potestad, cuyo exponente es la diferencia entre los dos exponentes dados del dividendo y del divisór, 5^5 partidos por 5^3 dan al quociente $5^{5-3}=5^2$. De la misma suerte 4^3 partidos por 4^3 da al quociente 4^{3-3} pero $3-3=0$ luego el quociente reducido es 4^0; digo que es igual á 1, y es evidente; pues una cantidad está en sí misma una vez, luego, 4^3 está en 4^3 una vez, y el quociente de la una partida por la otra es 1. Hemos visto que es tambien 4^0; luego $4^0=1$, y lo mismo se demonstrará de otra qualquiera cantidad.

Sirven á nuestro intento las potestades segunda y tercera, esto es, el quadrado, y el cubo; no hai dificultad en formarlos de qualquier número dado, entero, ó quebrado; pero se requiere alguna

aten-

atencion para sacar la raíz quadrada ó cubica de un número dado, operacion que se llama *extraccion de raices.*

Un número puede dividirse en tantas partes quantas cifras hai en su expression; 25 en 2, es á saber 20+5.325 en 3, que son 300+20+5;4325 en quatro, 4000+300+20+5, y assí de los demás. Esto supuesto.

SACAR LA RAIZ QUADRADA DE UN número dado.

EL quadrado de qualquiér número, es igual á la suma de los quadrados de cada una de las partes que le componen, tomadas por cada cifra á parte del modo que acabamos de decir, y del duplo producto de cada parte por cada una de las demás. v.g. el quadrado de 4325 dividido en sus partes, 4000+300+20+5, es la suma del quadrado de - - - - - - - - - - - - - - - - 4000 = 16000000.
del quadrado de - - - - - - - - - - - 300 - - 90000.
del quadrado de - - - - - - - - - 20 - - 400.
del qurdrado de - - - - - - - - - - - 5 - - 25.
del duplo producto de 4000 por 300 - - - 2400000.
del duplo producto de 4000 por 20 - - 160000.
del duplo producto de 4000 por 5 - - - 40000.
del duplo producto de 300 por 20 - - 12000.
del duplo producto de 300 por 5 - - - 3000.
del duplo praducto de 20 por 5 - - - 200.

Suma que es el quadrado de 4325 - - 18705625.

La demonstracion de esta proposicion es facil. El quadrado de 4325 es el producto de esse número por sí mismo. Pero formando esse producto, como todas las cifras se multiplican por todas las cifras, 4000 se multiplicarán por 4000, y sale su quadrado; 300 por 300, y viene su quadrado, y assí de los demas. Luego cada cifra de arriba se multiplica por cada cifra de abaxo, y porque son las mismas arriba y abaxo, cada una de ellas tomada á parte dará dos productos por la misma cifra; 4000 de arriba se multiplican por 5 de abaxo, 5 de arriba por 4000, esto forma el doble producto de 4000 por 5, y assí de las demas.

De alli se saca la regla para extraher la raiz quadrada de qualquiér número dado, v.g. 18705625.

```
18|70|56|25  { 4325           Raíz.
16             4; 83; 862; 8645 divisores.
  270
  249
   2156
   1724
    43225
    43225
```

Se divide por lineolas el número dado, de dos en dos cifras empezando desde lá derecha: la última division á la izquierda puede tener dos cifras, ó solo una según fueren pares ó impares las

ci-

cifras del número dado. De qualquiera suerte siempre tendrá la raiz que se busca tantas cifras quantas divisiones hubiere en el número dado: en este exemplo tendrá quatro; la razon de distribuir el número dado de dos en dos cifras, es que no poniendose en la raíz mas de una cifra en cada operacion, la mayór ha de ser 9, y su quadrado 81 no tiene mas de dos cifras.

Se hace la operacion de la izquierda hácia la derecha, como la particion, y la raiz de la primera division á la izquierda, se sabrá siempre; pues no pudiendo ser essa division mayór que 99, cuya raiz aproximada en número entero es 9, bastará saber de memória los quadrados de las nueve cifras de la Arithmética que son:

	1.	2.	3.	4.	5.	6.	7.	8.	9.
Quadrados----	1.	4.	9.	16.	25.	36.	49.	64.	81.

La raíz quadrada aproximada de 18 es 4, que se pone á la raiz como si fuera quociente: se tomará su quadrado, multiplicandola por sí misma, pues el número dado debe contener esse quadrado. Es 16 que se restan de 18, y quedan 2: supongo que se ve que el 4 de la raiz es como 4000, pues la raiz será de 4 cifras, su quadrado es ---- 16000000, que restados de 18|70|56|25, dan el mismo resíduo que él que viene tomando solo las cifras de valór. Se baxa la division immediata 70, y se forma el dividendo 270. Si se conociera el segundo término de la raíz, se tomára tambien su quadrado, y el duplo del producto de él, por el primer término ya hallado; pues el número dado contie-

ne

ne essos productos, como se ha advertido; luego para hallarle, se tomará el duplo del primér termino, se partirá por el y vendrá al quociente el segundo término de la raiz. El primer término es 4, su duplo hace 8; escribase esse número como divisór, y en 270 ó en 27 caben 8, tres veces, escribanse 3 en el quociente ó raiz y también en el divisór, por necesitarse el quadrado de este término: luego el producto de 83 divisór, por 3 segundo térmimo, hace 249, que es el duplo producto del primér término por el segundo, mas el quadrado del segundo, y restados del dividendo quedan 21. Báxese nueva division 56, y formese nuevo dividendo 2156, que debe contener el quadrado del tercer término de la raiz que se busca, mas el duplo producto de los dos primeros términos por el tercero, mas, &c. Dupliquense por esto los dos primeros términos, ya hallados 43, y se hará nuevo divisór 86. En 215, de 2156, cabe el divisór 86 dos veces; se escriben 2 en el quociente ó raíz, y para tener el quadrado, se escriben también en el divisór que viene á ser 862, su producto por 2 es 1724, que restados del dividendo, dexan 432. Se baxa la última division 25, y es el último dividendo 43225; este número debe contener el duplo del producto de cada uno de los tres primeros términos de la raíz por el quarto término que se busca, mas el quadrado de este mismo quarto término: luego partiendo por el duplo de los tres primeros términos, vendrá al quociente el quarto término; los tres primeros son 432, su duplo 864 es el partidór. En

4322 cabe á 5 veces, luego escriben 5 en la raíz, y en el partidór, y multiplicando 8645 por 5, el producto es 43225, igual al dividendo, luego el número dado es un quadrado perfecto, y se ha sacado su raíz quadrada como se pidió.

La extraccion de la raíz quadrada de qualquiera cantidad numérica que sea no tiene otra dificultad; solo puede suceder, como en la particion, el que no quepa el partidór en el dividendo, y entonces se pondrá cero en el cociente esto es en la raíz, y la raiz assí aumentada al décuplo se doblará, como en el precedente exemplo, y para formar nuevo divisór, se baxará nueva division de la cantidad propuesta, y se partirá por aquel nuevo divesór, y assí hasta que el divisór con la nueva cifra que se le ha de añadir (que es la misma que la nueva cifra que se pone en la raiz) pueda caber en el dividendo; por exemplo, se pide la raíz quadrada de 1016064.

1 | 10 | 60 | 64

1 ... { 1008 / 1. 20 2008

0016064
16064
0

Habiendose señalado en la cantidad propuesta las divisiones de dos en dos cifras de la dere-

recha hacia la izquierda, la última division no tiene mas de 1. Digo pues: la raiz quadrada de 1 es 1. que escribo en el quociente, y tambien como divisór; y 1. 1=1 que restado de 1 dexa 0. baxo la segunda division 0 1, y doblando la raiz adquirida 1, se hace nnevo divisór 2. En 0 0 1 dividendo, no cabe ni una vez el divisór 2: luego pondré 0 en la raíz: borro el divisór 2, y la nueva raiz 10 se dobla y hace nuevo divisór 20; baxo otra division 60, y se forma nuevo dividendo 0, 01, 60. Digo en 00160 quantas veces cabe el número 20, es claro que le cabe hasta 8 veces, pero ni 1 se puede poner en el quociente ó en la raiz, porque si 1 se pusiera, tambien se pondria en el divisór, que seria entonces 201, y multiplicando 201 por 1, el producto 201 fuera mayór que el dividendo 160, y por consiguiente pondré 0 otra vez en la raíz, y baxando á la siguiente y última division 64, se formará nuevo dividendo 16064.

La raíz adquirida hasta ahora es 100, se borra el último divisór 20, y se dobla la raíz 100, formando nuevo divisór 200; y en 1606, caben 8 veces, que se escriben en la raiz, y al divisór que se hace 2008; y multiplicando este por 8, el producto 16064 se resta del dividendo, y no queda nada: luego la cantidad propuesta es un quadrado perfecto, y su raiz es 1008.

Si la cantidad dada no fuere un quadrado perfecto (y generalmente una potestad perfecta del mismo exponente que la raiz que se pide) quedaá

rá una cierta cantidad en el último resíduo , y se puede sacar entonces la raíz *por aproximacion* ; para esto se añade al resíduo una division de ceros, (en la raiz quadrada un par de ceros ; en la cubica , como despues veremos , tres ceros) y si es menester dos divisiones ó pares de ceros , tres divisiones ó pares , &c , (siempre en la quadrada) y se prosigue la extraccion como sobre los números antecedentes , y lo que saliere en la raiz serán fracciones decimales , décimos , centecimos , milésimos, &c , que se añaden á la cantidad entera de la raiz ; advirtiendo que con la adicion de una division de ceros el errór de la raiz es menór que $\frac{1}{10}$, con la addicion de dos divisiones de ceros , el errór es menór que $\frac{1}{100}$ &c.

Por exemplo : Sacando la raiz quadrada de 53 hallo 7 , cuyo quadrado es 49 , que restados de 53 dexan 4 ; añado á este resíduo 4 , una division de cero , el resíduo es 400 , y prosiguiendo la extraccion hallo 2 , y la operacion hecha quedan 116; luego la raíz *aproximada* de 53 es $7\frac{2}{10}$ pues el quadrado de esta raiz es $51\frac{84}{100}$, menór que 53 ; pero si á la raiz $7\frac{2}{10}$ se añade $\frac{1}{10}$, y sea $7\frac{3}{10}$ su quadrado $53\frac{29}{100}$ será mayór que la cantidad propuesta : luego la verdadera raiz es mayór que $7\frac{2}{10}$, y menór que $7\frac{3}{10}$, y el errór es menór que $\frac{1}{10}$; en este caso se debe preferir $7\frac{3}{10}$ por aproximarse mas á la verdadera cantidad.

Para estas operaciones de aproximacion de qualesquiera raices , la regla general es multiplicar la potestad ó cantidad dada por la semejante po-

testad del número que indica el grado de la aproximacion ó el error que se quiere permitir; y sacando la raiz semejante del producto, partirla por aquel mismo número, pues el quociente será la semejante raíz aproximada, que se pide, v.g. si queremos la raíz quadrada de 53, á $\frac{1}{18}$ de aproximacion, esso es, que $\frac{1}{18}$ mas que se añada á la raiz, salga un quadrado mayór que 53: multiplicaremos 53 por $18^2 = 324$, y del producto sacaremos la raíz quadrada que es entre 131 y 132, pártase 131 por 18, el quociente $7\frac{5}{18}$ es la raíz pedida aproximada á $\frac{1}{18}$ mas ó menos de la cantidad numérica 53; esta es como dixe la regla general; pero es la aproximacion por los ceros mas común que otra algúna, anque sea la misma regla, aplicada solamente al méthodo dél duplo.

La *demostracion* de la regla para sacar la raíz quadrada es inutil, no siendo á modo de decir otra cosa mas de la aplicacion de lo demonstrado ya á cerca de las partes que componen un quadrado, y la subtraccion de essas partes que se forman successivamente de la cantidad, cuya raiz se busca.

SACAR LA RAIZ CUBICA DE UN NUmero dado.

EL cubo de qualquiera cantidad numérica de dos partes, ó términos (son tantas como cifras) es la suma de los cubos de cada término, y de los productos del triplo del quadrado de cada término multiplicado por el otro. El cubo de 25

esto es, de 20+5. contiene el cubo de 20, el cubo de 5, tres veces el quadrado de 20 por 5, tres veces el quadrado de 5 por 20.

Si la cantidad numérica tiene mas de dos términos sean 3, 4, &c, su cubo, á mas de estos cubos y produćtos de cada término, contiene seis veces el produćto de todos los terminos tomados, y multiplicados entre sí de tres en tres. El cubo de 325=300+20+5, es la suma de los cubos de 300, de 20, de 5, de 3 veces el quadrado de 300 por 20, de tres veces el quadrado de 300 por 5, de tres veces el quadrado de 20 por 300, de 3 veces el quadrado de 20 por 5, de tres veces el quadrado de 5 por 300, de tres veces el quadrado de 5 por 20, de seis veces el produćto de 300. 20. 5.

El cubo de 4325=4000+300+20+5, á mas de los cubos de cada término, de tres veces el quadrado de cada término, por cada uno de los demás términos, comprehende seis veces el produćto de 4000. 300. 20; seis veces el de 4000. 300. 5; seis veces él de 4000. 20. 5; seis veces él de 300. 20. 5.

Este termino de seis veces, &c, que se atribuye á los cubos de una cantidad de mas de dos cifras, es preciso; se pudiera aplicar á la extraccion de la raiz cúbica de otro modo; y con otra expression, que tal vez pareceria mas facil, y abreviaría la operacion; pero expresandole, como hemos hecho la regla sale mas general, mas adequada, y sobre todo mas conforme á la realidad.

La *Demonotracion* de èssa proposicion se hará por qualquiera, considerando el quadrado de una cantidad, y los productos que se toman, y luego los que forma el mismo quadrado multiplicado por la raíz, para hacer el cubo, distribuidos unos y otros productos en sus partes con el signo +, como hemos echo.

De donde se saca la regla practica para extraher la raíz cúbica de qualqaiér número dado, suponiendo que se saben los cubos de las nueve cifras, que son las siguientes:

Raizes -	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Cubos -	1	8	27	64	125	216	343	512	729

```
952 | 763 | 904. { 984
729                 9, 243, 2884140
223763
212192
  11571.904
  11571,904
          0
```

Propóngase el sacar la raíz cubica de là cantidad 952763904; se escribe á parte, y se divide de tres en tres números, empezando desde la derecha. La última division puede tenér una, ù dos, ó tres cifras; peró siempre la raiz tendrá tantas cifras quantas divisiones tubiere la cantidad assí distribuida.

Por lo que se ha dicho en la operacion de sa-

sacar la raiz quadrada, se ve porque en la raiz cúbica se distribuye la cantidad de tres en tres cifras; pues una sola cifra se ha de escribir á cada operacion particulár en el quociente; luego quando mayór, ha de ser 9, cuyo cubo es 729. Y el número próximo mayór 10 tiene por cubo 1000, que consta de 4 cifras.

Empezando por la division de la izquierda 952, se busca su raiz cúbica, que no puede ser mayór que 9, con efecto se halla ser 9, se escribe en la raiz en forma de quociente, y se resta su cubo 729 de la division ya tomada: quedan 223.

Se baxa nueva division que con el residuo forma nuevo dividendo 223763. Para hallar la segunda cifra de la raiz se tomará tres veces el quadrado de la primera, que entonces valdrá 90; será pues 9^2. $3 = 24300$, y se le añadirán tres veces la misma primera cantidad 90, esto es 270, la suma será 24570; luego será el partidór, y partido el dividendo, se halla 8 por quociente ó por segunda cifra de la raiz.

Háganse ahora los productos que se deben hacer con estas dos cifras de la raiz, y réstese la suma de ellos del dividendo en esta forma, notando siempre qre el 9 vale 90, y el 8 solamente 8.

Tres veces el quadrado de 90 por 8 . .	194400
Tres veces el quadrado de 8 por 90 . . .	17280
El cubo de 8.	512
Suma.	212192

Hecha la subtraccion quedan 11571; se baxa

xa la immediata division 904, y se forma nuevo dividendo 11571. 904. Este nuevo, y último dividendo contiene en sí la suma de los productos de tres veces el quadrado de cada una de las dos cifras ya halladas de la raiz (de las que la primera 9 representa ya 900, y la segunda 8 representa 80) por la nueva cifra que se busca; de tres veces, la suma de las dos cifras ya halladas por el quadrado de essa cifra que se busca, de seis veces el producto de las tres; esto es, seis veces el producto de las dos halladas, multiplicado por la que se busca, y finalmente del cubo de essa misma que se busca.

Facil será, pues, hallar essa suma, aunque la operacion parezca tal vez larga.

Tres veces el quadrodo de 900.	2430000
Tres veces el quadrado de 80 . .	19200
La suma de estas dos es	2449200
Tres veces la suma de 980 . . .	2940
Seis veces el producto de la primera 900 por la segunda 80	432000
La suma será el partidór . . .	2884140

Partiendo el dividendo 11571904, por él, le cabe á 4 que se escriben en la raiz, y luego se forman los productos que se han indicado.

El

El producto de 2449200 por 4 = . .	9796800
El producto de 2940 por 16 . = Quadrado de 4 . . . . } . .	47040
El producto de 432000 por 4 . . .	1728000
El cubo de 4	64
Suma	11571904

Que se resta del dividendo, y no queda nada, por que la cantidad dada es un cubo perfecto, cuya raiz cúbica es 984.

Si la cantidad propuesta no fuere cubo perfecto, hecha la operacion, quedará un resíduo, del qual se sacará la raíz tan aproximada como se quisiere, hasta $\frac{1}{10}$, $\frac{1}{100}$, $\frac{1}{1000}$, &c, por la regla general ya explicada. Si v.g. se quiere en décimas, se multiplicará la cantidad por el cubo de 10=1000, escribiendo á la derecha de ella tres ceros; si en centésimas se multiplicará la cantidad por el cubo de 100, esto es, por 1000000, escribiendo á la derecha de ella seis ceros ú dos divisiones; se sacará de ella assí multiplicada la raiz hasta donde alcanzare, y saldrá en décimas ó en centécimas, &c, con menos de $\frac{1}{10}$ ú de $\frac{1}{100}$, &c, de yerro; essa raíz se partirá por 10 ó por 100, y se tendrá en enteros y decimos, ó en enteros y centécimos.

Pidese la raiz cúbica de 25367; por la operacion regular se hallará ser mayór que 29, y menór que 30, pues con 29 quedan 978, y este resíduo se quiere aproximar en centécimos; añadansele á la derecha seis ceros, y será 978000000, ú desde el princípio á la cantidad dada quando se

pretende sacar su raiz hasta $\frac{1}{100}$, y será esta - - - -
25367000000, y hágase la operacion como sigue.

```
25|367|000|000      { 2938
                          1260
 8                       253170
-----                   24143490
17367
16389
-----
  978000
  764757
 ---------
  213243000
  206600672
 -----------
   6642328
```

La raiz cúbica en enteros de 25 es 2, su cubo 8 restado de 25 quedan 17; y con la division immediata 17367; se encontrará el partidór, sumando tres veces el quadrado de 2 que valen ya 20 y es 1200, con tres veces la misma cantidad 20, esto es, con 60, luego el partidór es 1260; en 17367, se halla contenido 9 veces, y haciéndose los productos necesarios, tendremos tres veces el quadrado de 20 por 9 es. 10800
Tres veces el quadrado de 9 por 20 es. 4860
El cubo de 9. 729
suma. 16389
Restada essa suma de 17367 quedan 978, que con la division immediata forman 978000, se busca nuevo partidór de

Tres

Tres veces el quadrado de 200 que hacen ..	120000
Tres veces el mismo número 200	600
Tres veces el quadrado de 90	24300
Tres veces el mismo número 90	270
Seis veces el producto de 200 por 90 .	108000
Suma	253170

Se halla esse partidór tres veces en 978000 y haciendose los productos precisos

Tres veces el quadrado de 200 por la nueva raiz 3	360000
Tres veces el mismo número 200 por el quadrado de la nueva raiz.	5400
Tres veces el quadrado de 90 por la raiz nueva	72900
Tres veces 90 por el quadrado de la nueva raiz 3	2430
Seis veces el producto de 200 por 90, por 3	324000
El cubo de la nueva raiz 3	27
Suma	764757

Restada essa suma de 978000, quedan 213243000 con los tres ceros de la division immediata; el partidór de essa nueva cantidad se formará sumando.

Tres veces el quadrado de 2000 . . .	12000000
Tres veces 2000	6000
Tres veces el quadrado de 900 . . . ,	2430000
Tres veces 900	2700
Tres veces el quadrado de 30	2700
Tres veces 30	90
Seis veces 2000 por 900	10800000

Seis veces 2000 por 30	360000
Seis veces 900 por 30	162000
Suma	25763490

Y partiendo el último residuo por essa suma, le cabe 8 veces; se escriben 8 en la raíz, y se forman los verdaderos productos que son

Tres veces el quadrado de 2000 por 8.	96000000
Trse veces 2000 por el quadrado de 8. .	384000
Tres veces el quadrado de 900 por 8 . .	19440000
Tres veces 900 por el quadrado de 8 . .	172800
Tres veces el quadro de 30 por 8	21600
Tres veces 30 por el quadrado de 8	5760
Seis veces 2000 por 900 por 8	86400000
Seis veces 2000 por 30por 8	2880000
Seis veces 900 por 30 por 8	1296000
El cubo de 8 . . . . ,	512
Suma	206600672

Que restada de 213243000, dexa por residuo último 6642328, y queda la operacion hecha, siendo la raíz cúbica que se buscaba 2938 centésimos, ó $2938_{\overline{4}}$

Si en lugár de 8 en la raiz se toman 9, la suma de los productos será 232505019, mayór y mas distante de la propuesta cantidad.

Partiendo por 100 la raíz hallada 2938 se reducirá á $29\frac{38}{100}$, que también se escribe 29, 38 sin expresion del denominadór, solo con coma entre los enteros y el numeradór del qnebrado; pues es regla general que no expresandose el denomina-

dór

dór de un quebrado, siempre es la unidad con tantos ceros á la derecha como cifras hai en el numeradór.

La demonstracion es con evidencia lo mismo que la operacion misma, que no es otra cosa mas de la aplicacion de la regla á un exemplo Se han demonstrado los produćtos de la raíz que componen un cubo; se restan essos mismos produćtos del cubo, luego se saca la raíz cúbica.

SACAR LA RAIZ QUALQUIERA DE UN quebrado.

SE saca la raíz pedida del numeradór, y luego la del denominadór del quebrado, y estas raizes son el numeradór y el denominadór de un nuevo quebrado, que es la raíz de aquel que se ha dado: la raíz quadrada de $\frac{25}{64}$ es $\frac{5}{8}$, por ser 5 raíz quadrada de 25, y 8 raíz quadrada de 64.

La raíz cúbica de $\frac{27}{2197}$ es $\frac{3}{13}$, porque 3 es la raíz cúbica de 27, y 13 la raíz cúbica de 2197.

Demonstracion. Las potestades son produćtos de la raíz por la raíz. Los produćtos en los quebrados son los del numeradór por el numeradór, y del denominadór por el denominadór (por lo enseñado ya) luego la raíz de un quebrado será un quebrado, cuyos términos serán las raices de los términos del quebrado que se da como potestad.

Se aproximará también de la raíz de un quebrado que no fuere poténcia perfećta, por las reglas de aproximacion ya explicadas. Assí se hallará la

ra-

raíz quadrada de $\frac{2}{3}$ transfotmados en $\frac{20000}{30000}$, ser $\frac{141}{173}$, y su raìz cúbica $\frac{29}{31}$.

DE LOS INCOMMENSURABLES.

LAs cantidades en enteros ó en quebrados que no son potestades exactas de un cierto grado, nunca pueden tener raíz de esse grado que se expresen en númerós; hemos visto el méthodo de aproximar quanto se quisiere; pero nunca se llegará á una expresion, esto es, á una raíz exacta ni en enteros, ni en enteros con quebrados; pues si se llegara, seria la cantidad una potestad exacta de un cierto número, contra la suposicion. Al número 50 no se le podrá asignar raíz quadrada exacta, pues es mayór que 7, pero no es 8 cuyo quadrado es 64, y qualquier quebrado que se junte á 7 por raíz de 50, multiplicándose por sí mismo, producirá siempre un quebrado, que no ofrece la cantidad 50; luego ni en enteros, ni en enteros con quebrado se puede assignar la raíz de 50, ni de otra qualquiera potestad imperfecta.

A essas raices inassignables de cantidades que no son poténcias exactas y que se señalan á veces con el *signo radical* $\sqrt{}$, se da el nombre de *incommensurables*, *irracionales*, *sordas*.

Luego se puede decir que assí como la division imperfecta produce los quebrados, assí la extraccion imperfecta de raices produce los incommensurables.

La raíz quadrada de 18 es incommensurable, pu-

pues es mayór que 4 cuyo quadrado es 16; es menór que 5, cuyo quadrado es 25; por aproximacion será $4\frac{1}{5}$ ó mas exactamente $4\frac{6}{25}$, ó mejór $4\frac{121}{500}$ &c, pero nunca se prodrá dar justa en números racionales.

Los incommensurables assí como los quebrados se pueden reducir, y assí como las demas cantidades admiten las demas operaciones de sumar, restar, multiplicar, partir, &c.

REDUCIR LOS INCOMMENSURABLES de diferente grado ú denominacion, á una misma.

SEan $\sqrt{2}$ $\sqrt[3]{5}$ que se han de reducir al mismo exponente de raíz; estos imcommensurables son lo mismo que $2^{\frac{1}{2}}$, $5^{\frac{1}{3}}$; redúzganse estos exponentes $\frac{1}{2}$; $\frac{1}{3}$ á la misma denominacion $\frac{3}{6}$, $\frac{2}{6}$, y serán los incommensurables $2^{\frac{3}{6}}$, $5^{\frac{2}{6}}$, reducidos á una misma denominacion; elevese 2 efectivamente á la tercera petestad, y 5 á la segunda, y serán $\sqrt[6]{8}$, $\sqrt[6]{25}$, reducidos á la misma denominacion, é iguales respective á $\sqrt{2}$, $\sqrt[3]{5}$. Assí $\sqrt{5}$; $\sqrt[3]{7}$ se reducirán á $\sqrt[6]{125}$; $\sqrt[6]{49}$, &c.

RECUCIR LOS INCOMMENSURABLES A su mínima expression.

BUsquese entre todos los divisores simples ó compuestos de la cantidad puesta debaxo del signo radical, una potestad, y la mayór posible, del mismo gra-

grado, que la divida exactamente; si se hallare, será reducible el incommensurable, y no hallándose, no se podrá reducir á menór expression; será *irreducible*. En el primér caso, se partirá la cantidad dada por la potestad hallada, y el quociente se pondrá debaxo del signo radical con el mismo exponente que antes, y á la izquierda del signo radical, la raíz (del mismo exponente) del devisór, y quedará el incommensurable reducido á su menór expression.

Se supone que hallados todos los divisores se cotejarán con una tabla de las potestades, esto es, de los quadrados, de los cubos, &c, para ver si alguno de los divisores es potestad exacta del grado del radical.

Es incommensurable $\sqrt{27}$, por mayór que 5 y menór que 6, pero 27 se pueden partir exactamente por 9, potestad del mismo grado que $\sqrt{27}$, que es lo mismo que $\sqrt[2]{27}$; partiendo 27 por 9, el quociente es 3; luego se escribirá $\sqrt{3}$; y poniendo 3, raíz quadrada de 9 antes del signo radical, será $3\sqrt{3}$, el incommensurable reducido á su menór expression.

$\sqrt{18}$ se reducirá á $3\sqrt{2}$; $\sqrt{162}$, á $9\sqrt{2}$, &c.

Se quiere reducir $\sqrt[3]{16}$; hallo 16 partible por 8, potestad tercera, como la cantidad puesta debaxo del signo; parto 16 por 8, el quociente es 2, que pongo baxo del signo radical, y escribiendo la raíz, cúbica de 8 á la izquierda, tengo $2\sqrt[3]{2}$, por $\sqrt[3]{16}$ reducido. La cantidad puesta

ta antes del signo radical , es racional, lo demás es irracional. Si no hai racional antes del signo , se supone siempre la unidad ; $\sqrt{2}$ es $1\sqrt{2}$; $\sqrt{5}$ es $1\sqrt{5}$,

Se quiere reducir $\sqrt{2205}$ á su mínima expression ; buscando todos los divisores de 2205, hallo que esse número es dibisible exactamente por distintas potestades segundas , v.g. 9.49 ; 441 : prefiero la última como mayór , y partiendo 2205 por 441 , escribo el quociente 5 baxo del signo radical , y poniendo á su izquierda 21 , raiz quadrada de 441, me vienen $21\sqrt{5}=\sqrt{2205}$, reducido á sus minimos términos.

Si se huviera escogido el quadrado 49 , la reduccion hubiera sido $7\sqrt{45}$; pero $\sqrt{45}$ se puede todavia reducir á $3\sqrt{5}$; luego $7\sqrt{45}$ será $7.\ 3\sqrt{5}$, esto es , $21\sqrt{5}$, como antes.

A haber escogido el quadrado 9 , hubiera salido el incommensurable $3\sqrt{245}$; pero este se reduce á $7\sqrt{5}$; luego vendrá como antes $3.\ 7\sqrt{5}$; esto es , $21\sqrt{5}$.

Próponese reducir $\sqrt{81}$, que se mira como incommensurable. Por la regla dada se ha de hallar $3\sqrt{9}$; pero $\sqrt{9}=3\sqrt{1}$; luego $\sqrt{81}=3.\ 3\sqrt{1}=9\sqrt{1}$ esto es , $9.\sqrt{1}$, esto es , 9 ; pero reparando que 81 uno de los divisores de 81 es tambien quadrado , se hará la reduccion mas breve , partiendo 81 por 81 , el quociente es 1, y la reduccion será $9\sqrt{1}=9$.

En algunos casos un incommensurable irreducible por el méthodo de los divisores , se podrá

re-

reducir por extraccion de raíz, y en otros casos por uno y otro méthodo juntos. v.g. $\sqrt[6]{169}$. El exponente $6=2.3$. esto es, el exponente de un quadrado, multiplicado por el exponente de un cubo; véase si 109 tiene raíz cúbica ó quadrada exacta; tiene esta última quees 13, luego $\sqrt[3]{13}$. $=\sqrt[6]{169}$.

Assí mismo se reducirá $\sqrt[6]{1728}$; pues la raiz cúbica de 1728 es 12, y por consiguiente $\sqrt{12}=\sqrt[6]{1728}$; pero $\sqrt[2]{12}=2\sqrt{3}$ (por el méthodo de divisores) luego $2\sqrt{3}=\sqrt[6]{1728}$.

Puede en fin reducirse en otros casos por extraccion de raíz de algún divisór de la cantidad incommensurable ú de alguna parte de algún divisór; propóngase el incommensurable $8\sqrt{\frac{75}{98}}$ para reducirlo á sus mínimos términos. Uno de los divisores de $\frac{75}{98}$ es $\frac{25}{49}$ quadrado de $\frac{5}{7}$; luego $\sqrt{\frac{75}{98}}=\frac{5}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$, y multiplicando por el racional 8, será $\frac{40}{7}\sqrt{\frac{3}{2}}$ que $=\frac{40}{7}\sqrt{\frac{6}{4}}$. No se puede sacar la raíz de $\frac{6}{4}$, pero se puede sacar la del denominadór 4, y safar la de debaxo del radical. $\frac{6}{4}=\frac{1}{4}.6$; sacando la raíz de $\frac{1}{4}$ divisór de $\frac{6}{4}$ da por la reduccion $\frac{1}{2}\sqrt{6}$; y toda la cantidad íncommensurables se reduce á $\frac{40}{7}.\frac{1}{2}\sqrt{6}$, esto es á $\frac{20}{7}\sqrt{6}$.

Si se proponen dos ó mas incommensurables para reducirlos á una misma y mínima expresion, se ha de buscar un común divisór entre ellos, tal, que él ó el quociente de la division sea una potestad perfecta del mismo grado que el radical de los incommensurables, que se suponen tener ó por sí

ó

ó por reduccion el mismo exponente; y hallado el divisór ó el quociente, con esta condicion, se reducirán como antes Por *exemplo.* $\sqrt{75}$ y $\sqrt{27}$ partidos por el común divisór 3, dan por quocientes 25, 9, quadrados de 5 y de 3; luego se reducirán los incommensurables á $5\sqrt{3}$, $3\sqrt{3}$; que es lo mismo que partir 75 por 25 uno de sus divisores y quadrado, vienen $5\sqrt{3}$; y 27 por 9 uno de sus divisores y quadrado, vienen $3\sqrt{3}$.

De allí sale una doctrina singulár, y es que unas cantidades incommensurables de por sí pueden ser comensurables entre sí y ser una á otra como número á número. $\sqrt{8}$ es incommensurable porque con ningún número entero ni quebrado se puede expressar la raíz qudrada de 8. Luego no tiene relacion determinada ni asignable á número alguno racional. Lo mismo se dirá de $\sqrt{18}$; pero entre $\sqrt{8}$ y $\sqrt{18}$ hai una relacion de número á número (se verá despues mas claramente lo que es rélacion de número á número) y por consiguiente estos dos incommensurables son commensurables entre sí; la prueba es, que reduciendo á minima expresion, $\sqrt{8}=2\sqrt{2}$, esto es, $2.\sqrt{2}$. y $\sqrt{18}=3\sqrt{2}$, esto es, $3.\sqrt{2}$.



Luego es $\sqrt{2}$ un común factór que dexa los productos con la misma relacion entre sí, que las cantidades que se han multiplicado: luego la relacion de $\sqrt{8}$ á $\sqrt{18}$ es la misma que la de 2 á 3. y se conoce que $\sqrt{8}$ es dos tércios de $\sqrt{18}$.

SUMAR LOS INCOMMENSURABLES

SE reducirán á la minima expression, y á la misma denominacion, si fueren commensurables entre sí; entonces se sumarán como los números racionales; si no fueren commensurables entre sí, se sumarán con el signo $+$.

Para sumar $\sqrt{48}$ y $\sqrt{75}$, se reducirán á $4\sqrt{3}$; $5\sqrt{3}$; la suma es $9\sqrt{3}$. Assímismo $\sqrt{50}$ con $\sqrt{18}$, se reducirán á $5\sqrt{2}$; $3\sqrt{2}$, la suma es $8\sqrt{2}$. De la misma suerte $\sqrt[3]{16}$ $\sqrt[3]{54}$, sumados hacen $5\sqrt[3]{2}$.

Pero $\sqrt{7}$ y $\sqrt{10}$ se sumarán con el signo $+$; $\sqrt{7}+\sqrt{10}$ por ser incomensurables entre sí.

RESTAR UN INCOMMENSURABLE DE *otro.*

SE harán las reducciones como para sumar, y si fueren commesurables entre sí, se restará como en los números racionales, siendo él que se ha de restar menór que el otro; si no fueren commensurables entre sí, ó si fuere él que se ha de restar mayór que el otro, se hará la substraccion con el signo $-$.

Para restar $\sqrt{18}$ de $\sqrt{50}$, se recucirián á $3\sqrt{2}$, y $5\sqrt{2}$; el residuo será $2\sqrt{2}$; pero si se dá $\sqrt[3]{54}$ para restar de $\sqrt[3]{16}$, reducidos estos incomensurables á su mínima expression, serán $3\sqrt[3]{2}$, $2\sqrt[3]{2}$, y restado el primero del segundo solo se puede escribir $2\sqrt[3]{2} - 3\sqrt[3]{2}$.

Assímismo no siendo commensurables entre

sí,

sí, se hará la operacion con el signo $-$; $\sqrt{10}-\sqrt{7}$, es el resíduo de $\sqrt{10}$ despues de quitado $\sqrt{7}$.

MULTIPLICAR INCOMMENSURABLES entre sí.

REducidos ellos á la misma denominacion, se multiplican términos; por términos; racional por racional, y se pone el produćto antes del signo radical; irracional por irracional, se pone el produćto baxo del signo radical; racional por iracional, y el prodćto se escribe, el racional antes del signo, y el irracional debaxo del signo.

Exemplo.

$\sqrt{2}\,.\,\sqrt{3}=\sqrt{6}$ $\sqrt[3]{5}\,.\,\sqrt[3]{7}=\sqrt[3]{35}$

$*\sqrt{3}.\sqrt{12}=\sqrt{36}=6$; $*\sqrt[3]{16}.\sqrt[3]{32}=\sqrt[3]{512}=8$

$\sqrt{3}.\quad 5=5\sqrt{3}$ $5\sqrt[3]{5}\,.\,3\sqrt[3]{2}=15\sqrt[3]{10}$

$*\sqrt{7}\,.\,\sqrt{7}=\sqrt{49}=7$

$*7\sqrt{6}\,.\,2\sqrt{6}=14\sqrt{36}=14.\,6=84$

Se repararán los exemplos señalados con estrella en que dos cantidades incommensurables forman un produćto commensurables.

PARTIR UN INCOMMENSURABLE POR *otro ó por otra cantidad qualquiera.*

EL méthodo general es escribir las dos cantidades en forma de quebrado; $5\sqrt{3}$, partidos por $\sqrt{2}$ darán al quociente $\frac{5\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$; pero algunas veces tiene lugár la division exacta, v.g. $\frac{\sqrt{75}}{\sqrt{3}} = \sqrt{25} \ldots\ldots = 5$.

Si se propone $\sqrt{6}$ á partir por $\sqrt{4}$ (que se escoge, aunque commensurable $= 2$ para mayór facilidad) en general se puede esribir $\frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}}$ ó $\sqrt{\frac{6}{4}}$; pero en este caso se puede adelantar la particion; pues $\frac{6}{4}$ es $\frac{1}{4} \cdot 6$; y $\frac{1}{4}$ es el quadrado de $\frac{1}{2}$; luego $\sqrt{\frac{6}{4}}$ reducido á su minima expresion será $\frac{1}{2}\sqrt{6}$ verdadero quociente.

También $\sqrt[3]{35}$ partido por $\sqrt[3]{5}$ dá por quociente $\sqrt[3]{7}$. En fin no habiendo mas de un término que partir por otro, se reducirán ambos á una misma denominacion, y se hará la particion aunque el quociente venga á ser un quebrado; pero será único, y puesto, debaxo de un solo signo radical Por *exemplo* $\sqrt[3]{17}$ habiéndose de partir por $\sqrt{2}$, se reducirán á $\sqrt[6]{289}$; $\sqrt[6]{8}$, y partiendo 289 par 8, el cociente $36\frac{1}{8}$ puesto debaxo del radical será el verdadro quociente $\sqrt[6]{36\frac{1}{8}}$, que se reduxera á $\sqrt[3]{6}$, á no tener $\frac{1}{8}$ mas en su expresion.

Si se ha de partir un incomensurable por un commensurable, se elevará este á la potestad del incommensurable, y se pondrá debaxo del signo radical por denominadór de un quebrado, cuyo numeradór será la cantidad puesta antes debaxo del radical; $\sqrt{10}$ se ha de partir por 3; el quadrado de este es 9, luego el quociente será $\sqrt{\frac{10}{9}}$; ó se formará un quebrado de la unidad por numeradór, y del commensurable por denominadór, y se pondrá esse quebrado antes del signo radical; $\sqrt{10}$ partido por 3 da al quocieente $\frac{1}{3}\sqrt{10}$.

Bastan estas noticias elementáres del cálculo de los incommensurables para el fin que nos proponemos. Su doctrina va mucho mas lexos; pues fuera de que un incommensurable puede tener distintos términos, positivos y negativos, y no uno solo positivo como los hemos considerado, hai tambien la formacion y resolucion de las potencias de essas cantidades, hai *raices de raices*, ó *raices universales*, *raices imaginárias*, y luego essa misma Arithmética por los exponentes substituidos con tanto acierto á los signos radicales, todo lo qual conviene al Tratado de Algebra.

La *demonstracion* de las operaciones sobre las cantidades incommensurables, sus reducciones &c, son las mismas que las que se han dado para los enteros y quebrados, y cada uno las podrá aplicar haciendose cargo de la naturaleza y definicion de los incommensurables.

DE

DE LAS RAZONES, PROPORCIONES *y Progreciones*

RAzón es la relacion entre dos cantidades *homogeneas*, esto es, de una misma naturaleza, cotejadas una con otra, como cantidades, y sin atencion á otra tercera homogénea. Pueden estas ser iguales, y tienen entonces *razón de igualdad*. Puede ser la una mayór que la otra, y la *razón* es de *desigualdad*.

Si la primera cantidad que se llama el *antecedente* es mayór que la segunda, que es el *consequente*, será la razón de *mayór desigualdad*; al contrário si el antecedente es menór que el consequente sera la razón de *menór desigualdad*.

De dos modos se pueden comparar dos cantidades; por el uno se busca de quatro una cantidad es mayór ó menór que otra, lo que es la *diferencia*, y á este cotejo llaman, aunque impropriamente, *razón arithmética*; si se comparan de esse modo los dos números 3 y 5, á la diferencia 2, le daremos el nombre de *exponente* de la razón arithmética; con la operacion del restar se conoce. Por el otro se considera quantas veces la una contiene ó está contenida en la otra, y es propriamente *la razón* de una cantidad á otra; es la *razón geométrica*, que se entiende siempre, quando se dice solamente *razón*. Se dan los números 3 y 5; si se trata de quantas veces 3 están contenidos en 5, es $1\frac{2}{3}$; si de quantas veces 3 contienen 5, es $\frac{3}{5}$: bien se ve que con la particion se determina la razón.

Pa-

Parece mas regulár que el antecedente sea el dividendo, y que el consequente sea el divisór, y esto es lo que supondremos. Entre los Authores unos lo practican assí y otros al revés; de qualquiér suerte la cantidad que sale en el quociente y que expressa la razon es su *exponente*.

Distintas razones pueden ser *semejantes* ó *dessemejantes*, que se dicen tambien *iguales* ó *desiguales*, lo que manifestarán sus exponentes, que son iguales, si las razones son semejantes, y desiguales, si las razones no son semejantes. La razon de 3 á 17 es semejante á la razon de 5 á $28\frac{1}{3}$, porque 3 están en 17 cinco veces y dos tercios $5\frac{2}{3}$, de la misma suerte que 5 están en $28\frac{1}{3}$, ó si se parten 3 por 17 el quociente será $\frac{3}{17}$, igual á $\frac{5}{28\frac{1}{3}}$ quociente de 5 partidos por $28\frac{1}{3}$; pues reduciendo estos quebrados á una misma denominacion, se hallará uno y otro ser $\frac{255}{1445}$, que reducidos á sus mínimos términos serán $\frac{3}{12}$ ó reduciendo $\frac{5}{28\frac{1}{3}}$ á la denominacion de 17-avos, se hallará lo mismo, luego siendo los exponentes iguales, las raices son semejantes

Este méthodo de cotejar una razón con otra igual, se llama *directo* quando se toma el antecedente de la primera razon á su consequente, como el antecedente de la segunda á su consequente; pero si es el antecedente de la una á su consequente, como el consequente de la otra á su antecedente, la una será *recíproca*, *inversa* de la otra; por exemplo, la razon de 4 : 7, es reciproca de la de 21 : 12, porque 4 : 7 = 12 : 21. Lo mismo se debe entender de las razones arithméticas, según

las

las diferencias fueren iguales ó desiguales, *directa* ó *reciproca*. La razon arithmética de 6 á 13, es semejante á la de 9 á 16, siendo ambas diferencias 7. La razón de 6 á 13 es reciproca de la de 16 á 9; y en fin una razón es mayór que otra, si el exponente de la primera es mayór que el exponente de la segunda; menór, si el exponente es menór.

Hai dos espécies de qualquiera razón, sea arithmetica ó sea geómetrica, es á saber la razon *de número á número*, *racional*, *commensurable*; ó la razón *irracional*, *incommensurable*, *sorda*.

La *razón commensurable* es la que puede expressarse exactamente en números enteros, ó quebrados formados con enteros; 7, 2; 4, 13; en la arithmetica; 7 : 2; 4 : 13; $\sqrt{27} : \sqrt{12}$ que es igual á la de 3 : 2 en la geométrica, &c.

Una razón *incommensurable* es la que no tiene expression exacta en números; la arithmetica 5, $\sqrt{10}$; $\sqrt{5}$, $\sqrt{2}$. La geométria $\sqrt{5} : \sqrt{2}$, &c.

En fin hai razón *simple* y razón *multipla*, y *submultipla*; razón *compuesta y subcompuesta*, esto es, *multiplicada* y *submultiplicada*.

Razón simple es la que por sí sola se considera como razón entre dos cantidades homogéneas. La multipla ó submultipla es la que hai entre dos cantidades de las quales la una contiene la otra un cierto número de veces, ó está contenida en ella. Es pues *dupla*, *tripla*, *quadrupla*, &c, quando la mayór contiene la menór dos veces, tres veces, quatro veces, ó que el exponente es 2, 3, 4, &c. como la de 6 á 3, la de 6 á 2, la de 8 á 2; es sub-

subdupla, subtripla, subquadrupla, &c; quando la menór es la mitad, la tercia parte, la quarta parte de la mayór, ó que el exponente es $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, como en la de 3 á 6, de 3 á 9, de 2 á 8. La razón de 6 á 3 es dupla, la de 3 á 6 es subdupla.

La razón compuesta ó subcompuesta, multiplicada ó submultiplicada es la que se puede considerar como el producto ó el quociente de otras razones, multiplicando los antecedentes entre sí, ó partiendo uno por otro, y haciendo lo mismo con los consequentes; v.g. la razón de 12 á 60 es compuesta de las de 4 á 6 y de 3 á 10. La razón de 3 á 10 es subcompuesta de la de 12 á 60. Quando las razones componientes son iguales ó semejantes, la compuesta goza nombre mas particulár; si de dos razones iguales ó semejatens es *duplicada*, que es lo mismo que la de los quadrados, assí la razón de 81 á 144 es duplicada de la de 9 á 12, y esta es *subduplicada* de la otra, y se dice también como las raíces. La de 10 á 40 compuesta de las de 2 á 4 y de 5 á 10, iguales ó semejantes entre sí es duplicada ó como los quadrados de qualquiera de ellas, pues es la misma que la de 4 á 16, ó la de 25 á 100.

Si la razón compuesta lo es de tres razones iguales, se dice *triplicada* ó como los cubos: la razón de 27 á 8 es triplicada de la de 3 á 2, y esta es *subtriplicada* ó como las raíces cúbicas de la otra, y assí de los demás números de razones iguales, que componen la nueva razón.

Si á los términos de una razón arithmética se

 aña-

añade ó si de ellos se resta una misma cantidad, las sumas ó los recíduos formarán siempre la misma razón arithmmetica. 9, 15, cuya diferencia es 6; aumentad os de 7, dan 16, 22, cuya diferencia es igualmente 6; y disminuidos de 7, quedará la razón de 2, 8, cuya diferéncia es siempre 6.

La *demonstracion* es evidente, pues añadiendo ó restando cantidades iguales de cada término, ni aumenta ni disminuye la difernncia que tenian essos términos entre sí, y por consiguiente queda la misma razón arithmetica.

Si se multiplican ó si se parten los téminos de una razón arithmérica por una misma cantidad, los productos ó los quocientes formarán una nueva razón arihmética, multipla ó submultipla de la primera, según el número de unidades de la cantidad que hubiere servido de factór ó de divisór. Pero essa nueva razón considerada como geométrica, sera igual á la que se ha multiplicado ó partido, consrderada también como razón geométrica. Se da la razón arithmerica 9, 15, cuya diferencia es 6; multiplíquese los términos por 3, los productos serán 27, 45 cuya diferencia es 18. Los tres últimos son multiplos, y en especie triplos de los tres primeros. Si se parten estos por 3, serán los quocientes 3, 5, cuya diferéncia es 2, y estos son submultiplos y en espécie subtriplos de los otros, Pero unas y otras razones, productos ó quocientes, forman razones geométricas iguales entre sí y con la arithmética propuesta, contiderada tambien como geométrica, $9 : 15 = 27 : 45 = 3 : 5$.

Es-

Es claro que los nuevos términos han de ser multiplos ó submultiplos de los primeros pues, se multiplican ó se parten por una misma cantidad: la diferencia sera equimultipla ó equisubmultipla de la primera, porque multiplicandose ó partiendose los términos de la primera razón, se amenta ó se dísminuye su diferencia tantas veces quantas unidades hay en el multiplicadór ó en el divisór; si la diferencia 9 á 15 es 6, será de 2 veces 6 entre 2 veces 9 á dos veces 15, y será la mitad de 6 entre la mitad de 9 á la mitad de 15, &c; pero la razón geométrica queda la misma, porque es la misma entre dos cantidades que entre el duplo, el triplo, &c, la mitad, el tércio, &c, de essas cantidades y generalmente entre sus produčtos ó sus quocienes por el mismo multiplicadór ó divisór. La razón entre una vez 9 y una vez 15, es la misma que entre dos veces 9 y dos veces 15, ó entre la mitad de 9 y la mitad de 15, por ser essa razón geométrica el modo de contener ó de ser contenido, y el simple contiene ó está contenido en el simple tantasveces, como el duplo contiene ó está contenido en el duplo, &c.

Luego multiplicando ó partiendo los términos de unna razón geométrica por un mismo número ó por dos números que tengan entre sí la misma razón geométríca, los produčtos ó los quocientes tendrán siempre ó la mísma razón, si es por un mismo número, ó la duplicada ó subduplicada, si es por dos números en la misma razón. Sigue lo uno de lo que acabamos de decir, y lo otro de las definiciones ya dadas.

Pero si á los términos de una razón geométrica se añaden ó se quitan los términos de otra razón geométrica igual, las sumas ó los resíduos quedarán en la misma razón geométrica.

Demonstracion. En la suma, el antecedente se forma de dos cantidades, que contienen ó etán contenidas un mismo número de veces cada una en cada una de las dos cantidades que forman el consequente: en la diferencia el antecedente es el resíduo de dos cantidades que tenian la misma propriedad con las dos, cuya diferencia es el consequente; luego en la suma y en la diferencia, el antecedente contendrá ó estará contenido en el consequente un mismo número de veces, esto es, la razones serán todas iguales entre sí.

La diferencia entre los términos de una razón geométrica es igual al consequente multiplicado por el exponente, menos 1 vez el consequente, ó al antecedente partido por el exponente menos 1 ves el antecedente.

Demonstracion. El consequente mas ó menos la diferencia (según la razon es de mayór ó menór desigualdad) es igual al antecedente; pero el consequente multiplicado por el exponente es tambien igual al antecedente; luego el consequente mas ó menos la diferencia es igual al consequente por el exponente, quitando de una y otra parte 1 vez el consequente, quedará, mas ó menos la diferencia, igual al consequente por el exponente, menos 1 vez el consequente, esto es, el consequente por el exponente menos 1.

Del

Del mismo modo el antecedente menos ó mas la diferencia es igual al consequente ; pero el antecedente partido por el exponente es tambien igual al consequente ; luego el antecedente menos ó mas la diferencia es igual al antecedente partido por el exponente ; quitando de cada uno una vez el antecedente, quedará , menos ó mas la diferencia, igual al antededeute partido por el exponente menos 1 vez el antecedente.

Una razón en general , como toda cantidad, es capáz de mas y de menos ; puede añadirse á otra ó á otras , ó restarse de ellas , puede ser multiplicada ó partida por otra ó por otras razones. En la geométrica , que forma , como se dirá luego , un quebrado , ya se han enseñado estas operaciones : en la arithmética se hacen del modo siguiente.

Para sumar razones arithméticas se sumarán los antecedentes , y se tendrá el antecedente de la suma ; se sumarán los consequentes , y se tendrá el consequente de la suma ; si estas razones arithméticas son todas de mayór desigualdad , ó todas de menór desigualdad , la suma de los exponentes será el exponente de la suma de las razones ; pero si entre las razones que se han de sumar hai unas de mayór y otras de menór desigualdad , se sumarán á parte los exponentes de la misma especie de desiguales , y la diferencia de las dos sumas de exponeutes será el exponente de la suma , de las razones , que será de la espécie de desigualdad indicada por la mayór suma de los exponentes , lo que se entenderá luego con los exemplos , que cada uno se formará.

10,

10,	7	3	10,	7	3	7,	10	3
9,	2	7	2,	9	7	9,	2	7
13,	8	5	8,	13	5	8,	13	5
32,	17	15	20,	29	9	5,	1	4
						29,	26	3

Para restar una razón arithmética de otra, si ambas son de una misma espécie de desigualdad, y los términos de la inferiór menores que los de la superiór, assí como el exponente de aquella menór; se restará término de término, y exponente de exponente, como en la operacion ordinária del restar, y el resíduo dará la razón, y su exponente que se pide.

29,	20	9	20,	29	9
13,	8	5	8,	13	5
16,	12	4	12,	16	4

Si ambas son de una misma espécie de desigualdad, pero los términos de la razón inferiór mayores que los de la razón superiór, se trasformará una de las dos razones en otra igual, y tal que la subtraccion se pueda hacer; los exponentes no se mudarán; si él de debaxo fuere menór, se restará de él de arriba; si fuere mayór el exponente de abaxo, se tomará su diferéncia al otro, y será essa diferéncia el exponente de la razón resídua, que en este caso mudará de especie de desigualdad respecto de las otras dos.

De

De.... 17, 9 8	Se transforman en	17, 9	8
Restar.. 42, 39 5		12, 7	5
	Razón resídua......	5 2	3

17, 9 8	Se transforman en	47, 39	8
42, 25 17		42, 25	17
		5 14	9

Si las razones son de diferentes espécies de desigualdad, y los términos inferiores, menores, se restarán sin otra preparacion; si son mayores, se transformará una de las razones, y se hará la substraccion; pero en uno y otro caso el exponente del resíduo es siempre la suma de los exponentes de las razones, por ser estas de distintas especies de desigualdad.

20 29 9	10, 7 3	Se trasform. en	40, 37 3
10 7 3	20, 29 9		20, 29 9
10 22 12			20 8 12

Demonstracion de las dos operaciones del sumar, y restar razones arithméticas.

En el sumar los términos de la razón no hai dificultad, y siendo de la misma especie de desigualdad la suma de los exponentes és con evidéncia el exponente de la razón de la suma de ellos. Si son de distintas espécies de desigualdad, como sumandose los términos se destruye en el todo ó en parte

te essa diferencia, lo debe expresar el exponente. La cantidad de essas dos destrucciones es justamente la que es común entre las sumas particulares de los exponentes de la misma especie de desigualdad; luego la diferencia entre essas sumas será el verdadero exponente de la razón que tienen entre sí las sumas de los términos.

La misma atencion á las dos espécies de desigualdad y á sus combinaciones hará patente la operacion del restar.

En quanto á la transformacion, como no se cambie el exponente, que es lo que determina la razón, siempre queda ella la misma, y por consiguiente la operacion que es sobre razones, produce lo que se pedia.

Para multiplicar una razón arithmética por otra, se multiplica una qualquiera de las dos razones por el exponente de la otra, los productos formarán una nueva razón, que es el producto que se pide; y el exponente de esse producto, es el producto de los dos exponentes dados.

			8, 3 5
La razón arith.	5, 9 4	ó reciprocam.	5, 9 4
multiplic. por.	8, 3 5		32, 12 20
Producto. . .	25, 45 20		

Demonstracion. No siendo las razones otra cosa mas de sus exponentes, multiplicar una razón por otra, es multiplicar un exponente por otro, y siendo los mismos factores, el producto será siem-

pre

pre el mismo. En este exemplo, 4 . 5, ó 5 . 4; pero los términos, que tengan por exponente el producto, deberán ser los términos dados, multiplicados por el mismo factór que su exponente lo ha sido, para que su diferéncia se añada á si misma tantas veces, como el exponente se ha añadido. Luego la operacion da el verdadero producto que se pedia.

Luego se puede formar el quadrado, el cubo, ú otra qualquiera poténcia de una razón arithmética.

La particion de una razón arithmética por otra se hará partiendo el dividendo por el exponente del divisór, y los quocientes serán los términos de una nueva razón, que será el quociente de la particion; su exponente será el quociente del exponente del dividendo, partido por el exponente del divisór.

Partir. . .	25,	45	20	25,	45	20
Por. . . .	8,	3	5	5,	9	4
Quocient.	5,	9	4	$6\frac{1}{4}$,	$11\frac{1}{4}$	5

32,	12	20	32,	12	20
8,	3	5	5,	9	4
$6\frac{2}{5}$,	$2\frac{2}{5}$	4	8,	3	5

Demonstracion. La division es lo contrário de la multiplicacion. En la una se ha multiplicado por el exponente del multiplicadór, en la otra se debe partir por el exponente del divisór.

Luego se puede extraher la raíz qualquiera de

una razón arithmética elevada á una potestad qualquiera ; sáqquese la raíz pedida del exponente, y pártase la razón elevada por esta raíz ; los quocientes serán la raíz de la razón.

La raíz quadrada de 35, 60 25 se hallará ser 7, 12 5.

Dos razones iguales forman una *proporcion*, en que el antecedente de la primera razón es á su consequente, como el antecedente de la segunda razón es á su consequente: será *proporcion arithmética* ó *geométrica*, segun se consideran las diferencias ó los quocientes. En la geométrica, si la razón de 5 á 12, es igual á la de 30 á 72 ; las quatro cantidades ó las dos razones formarán la proporcion 5 *es á* 12 *como* 30 *es á* 72 ; y porque cada razón indica una particion del antecedente por el consequente ó al revés, y son las dos razones iguales, la proporcion se podrá escribir assí, $\frac{5}{12}=\frac{30}{72}$: pero ha parecido mejór indicar la particion con dos puntos entre el dividendo y el divisór ; esto es, entre el antecedente y el consequente 5 : 12 ; y este méthodo designará assí la particion como la razón ; luego la proporcion se escribirá siempre 5 : 12=30: 72.

Esta proporcion se llama *discreta*, quando tiene dos antecedentes y dos consequentes distintos uno de otro ; pero si el consequente de la primera razón sirve tambien de antecedente á la segunda razón, como en las dos razones iguales 18 : 12 y 12 : 8 ; en lugár de escribir 18 : 12=12 : 8, se escribe ∺ 18 : 12 : 8 y se llama proporcion *continua*.

Lo

Lo mismo se aplica á las rrazones arithmeticas; siendo dos iguales, forman una proporcion arithmética; *discreta*, quando los quatro terminos son distintos; *continua*, quando el consequente de la primera razón sirve de antecedente á la segunda, y se escriben assí con una coma, entre antecedente y consequente.

Proporcion arithmética discreta 23, 16 = 11, 4
Contínua. . . . . ÷ 53, 46, 39

En que el expouente de las razones ó la diferencia entre los dos terminos de cada razón es 7.

Una proporcion contínua de mas de tres términos forma una *Progression.*

÷ 53, 46, 39, 32, 25, 18, 11, 4, &c, es una progression arithmética formada de razones arithméticas contínuas, iguales, cuyo exponente es 7, diferéncia común entre dos qualesquiera términos immediatos.

∺ 3 : 12 : 48 : 192 : 768 : 3072, &c, es una progression geométrica formada de razones geométricas, continuas, iguales, cuyo exponente es 4. La progresion qne va de menos á mas se dice *ascendente* como la geométrica que sirve de exemplo; la que va de mas á menos es *descendente*, como la arithmética que se propuso.

No solo una progression geométrica ó arithmética ascendente puede subir y continuarse hasta lo que llaman los Mathemáticos el *infinito*; sinó tambien una descendente puede continuarse descendiendo hasta el infinito, ya sea en la arithmética en que después de haber llegado á un término igual,

ó mas ó menos immediato á o , se pueden poner términos negativos ó cantidades menores ó menos que o , que guarden entre sí la misma diferencia común , como la progression arithmética ÷ 53, 46, &c , que tendrá por términos 11 , 4 , −3 , − 10, − 17 , −24 , − 31 , &c ; y assí hasta el infinito; ya sea en la geométrica , en la qual descendiendo más y mas , llegarán los términos á ser quebrados que disminuirán en la misma razón , y pueden disminuir al infinito. Esto se experimentará con solo multiplicar sus denominadores por el exponente de la progression. v.g. la progression geométrica descendente ∺ 3072 : 768 : 192 : 48 : 12 : 3 : se continuará descendiendo por los términos $\frac{3}{4}$: $\frac{3}{16}$: $\frac{3}{64}$ = $\frac{3}{256}$: $\frac{3}{1024}$, &c , hasta el infinito , guardando los términos entre sí la misma razón ; y se formarán facilmente multiplicando cada denominadór por el exponente 4 de la progression.

Verémos mas adelante lo que nos importa sabér de las progressiones , y proseguirémos por ahora con decir lo preciso de las proporciones y de sus distintas reglas.

En la proporcion arithmética discreta ó contínua , la suma de los términos extremos es igual á la suma de los términos médios , ó al doble del término médio ; si 5 , 3 = 9 , 7 será 5 + 7 = 3 + 9 : si ÷ 5 , 3 , 1 , será 5 + 1 = 3 + 3.

Demonstracion. Habiendo proporcion , los exponentes ó las diferencias en ambas razones son iguales ; pero cada antecedente , mas ó menos la diferencia , es igual á su consequente ; y cada conse-

sequente, menos ó mas la diferencia, es igual á su antecedente; luego los dos términos de cada razón son iguales entre sí mas ó menos la diferéncia común á ambas razones, y las sumas de dos términos *heterólogos* (esto es, que tienen distintos ordenes, distintas posiciones relativas, distintos nombres) de ambas razones serán iguales; pues en cada una va el antecedente de una razón con el consequente de otra, y lo que uno tiene de mas en la una suma, que su correspondiente de la misma razón en la otra suma, el otro de la primera suma lo tiene justamente de menos, y assí la suma de los extremos es igual á la suma de los médios.

En la proporcion discreta siendo $5, 3 = 9, 7$, es lo mismo que $5, 5-2 = 9, 9-2$ por ser la diferencia 2 entre los términos de cada razón; luego la suma de los extremos será $5+9-2$, y la suma de los medios será $5-2+9$, que es la misma.

En la proporcion continua se puede hacer el mismo razonamiento, fuera de que una proporcion contínua se puede transformar en una discreta. v.g. en el exemplo precedente $5, 3 = 3, 1$.

La proposicion inversa, si dados quatro terminos, la suma de los extremos es igual á la de los médios, los quatro términos estarán en proporcion arithmética, es tambien verdadera. y se manifestará del mismo modo, pero inverso.

Sumar dos cantidades y restar una de otra, supone siempre una proporcion arithmética; en el primér caso, o es á una de las que se suman, como

la

la otra es á la suma de ellas. Si 9 con 15 hacen 24, será o, 9=15, 24. En el segundo caso, o es á la cantidad que se resta, como la diferéncia es á la de la qual se resta; si 9 restados de 24 dexan por resíduo 15, será o, 9=15, 24. Por lo dicho de la proporcion arithmética se ve la *demonstracion.*

La proporcion geometrica sea discreta, sea continua, da siempre el producto de los términos extremos, igual al producto de los términos medios, ó al producto del término médio por sí mismo, á su quadrado. Si 9 : 5=36 : 20, se sigue, 20. 9=36 . 5; y si ∺ 3 : 6 : 12, se sigue que 3 . 12=6 . 6=6^2.

Demonstracion. Si la proporcion fuere discreta, multiplíquense los términos de la razón 36 : 20 cada uno por 9 antecedente de la otra razón, los productos tendrán entre sí la misma razón que los términos igualmente multiplicados, y assí 36.9 : 20.9=36:20,

Multiplíquense assímismo los dos términos de la razón 9 : 5 por 36 antecedente de la otra razón, y será 36.9:36,5=9:5; y por ser 9 : 5= 36: 20, será 36.9:.36 . 5=36 : 20. Luego la razón 36 : 20 es igual á cada una de las dos razones.

36 . 9 : 20 . 9
36 . 9 : 36 . 5

Y por consiguiente essas dos razones son iguales entre sí; sus antecedentes son iguales, luego sus consequentes lo son también 20 . 9=36 . 5; el efecti-

tivo producto de cada una es realmente 180.

En la proporcion contínua no hai dificultad, pues se puede escribir como discreta 3 : 6=6 : 12.

La proposicion inversa es assímismo verdadera: si dados quatro términos el producto de los extremos es igual al producto de los médios, essos quatro términos formarán una proporcion; si 36; 20; 9; 5; son tales que 36 . 5=20 . 9 serán 36 : 20=9 : 5.

Demonstracion. Partiendo ambos productos por 20, serán $\frac{36 . 5}{20}=\frac{20 . 9}{20}$, esto es, $\frac{36 . 5}{20}=9$, y partiendo por 5 una y otra cantidad, serán $\frac{36}{20}=\frac{9}{5}$, esto es en otra forma 35 : 20=9 : 5, que es lo mismo que 36 á 20, como 9 á 5.

Multiplicar ó partir dos cantidades una por otra, supone siempre una proporcion geométrica.

En la multiplicacion, la unidad es á uno de los factores, como el otro es al producto.

Si 8 por 6 producen 48, será 1 : 8=6 : 48.

En la particion, la unidad es al partidór como el quociente al producto: si 48 partídos por 8 dan 6, será 1 : 8=6 : 48. La demonstracion se ve sin dificultad.

Luego la formacion de las poténcias y la extraccion de las raices suponen proporciones geométricas. Elevar 4 al quadrado es multiplicar 4 por 4, esto supone 1 : 4=4 : 16.

Elevar 4 al cubo; es multiplicar 4 por 4, y el

el producto 16 por 4, lo que arguye 1 : 4 = 4 : 16 y 1 : 4 = 16 : 64. Esto es la progression geométrica ∺ 1 : 4 : 16 : 64.

Sacar la raíz quadrada ó cúbica suponen las mismas proporciones tomadas al revés, y assí de las demás potencias y raices

Pueden cambiar de lugár los términos de una proporcion geométrica de vários modos, compónerse y descompónerse, es á decir, multiplicarse, partirse, &c, sin que dexe de haber proporcion, como siempre queden por extremos ó por médios, los mismos dos términos, sus compuestos ó descompuestos, &c, que en la proporcion dada hacen los extremos ó los médios; v.g. en la proporcion 9 : 5 = 36 : 20, los extremos son 9 y 20; los médios 5 y 36. quedando siempre 9 y 20 por extremos ó por médios; 5 y 36 por médios ó por extremos. quedarán los 4 términos en proporcion. Sigue esto de lo dicho ya mas arriba.

Qualquiera mutacion ó composicion de los términos tiene su nombre particulár, á la verdad poco util, mal escogido, y con variacion en algunos, según vários Autores; pero por ser estas mutaciones de grande uso, se hace preciso indicarlas; y se notará que las dos primeras se aplican tambien á las proporciones arithméticas, como se hará manifiesto con qualquiér exemplo.

Sea la proporcion geométrica dada 9 : 5 = 36 : 20 que se dice *ordenada*, quando el primér antecedente es á su consequente, como el segundo antecedente á su consequente.

Ha-

Habrá tambien proporcion
invirtiendo 5 : 9 = 20 : 36
alternando ó permutando 9 : 36 = 5 : 20

Componiendo. . . { 9+5 : 9 = 36+20 : 36
9+5 : 5 = 36+20 : 20
Dividiendo . . . { 9−5 : 9 = 36−20 : 36
o convirtendo. . { 9−5 : 5 = 36−20 : 20

Por division de razón ó componiendo y dividiendo
9+5 : 9−5 = 36+20 : 36−20

Hai también una proporcion, que se llama *ex æquo*, otra *perturbada*; penden estas de mas de quatro términos, de los que solos quatro se escogen, v.g. si 9 : 5 = 36 : 20, y 5 : 17 = 20 : 68 : habrá proporcion *ex æquo* ó *por igualdad de razones* --- 9 : 17 = 36 : 68. Si con la misma proporcion--- 9 : 5 = 36 : 20, se tiene otra 5 : 12 = 15 : 36, se concluirá la proporcion *perturbada* 9 : 12 : 15 : 20. Para la *ex æquo* se buscan proporcionales á los consequentes primeros, y se toman los antecedentes de una proporcion y los consequentes de otra. Para la *perturbada* se buscan dos médios proporcionales entre los médios de la primera proporcion, y se toman los extremos de una y los médios de otra.

La *Demonstracion* de essas mutaciones, que dexan siempre una proporcion, es patente de por sí, y se puede sacar de lo que se ha dicho ya; pues siendo el produćto de los extremos igual al produćto de los médios, habrá proporcion, y la igualdad de essos produćtos es manifiesta.

En toda proporcion arithmética, si se suma ó se resta; en toda proporcion geométrica si se multiplica ó se parte, con ó por la misma cantidad, cada antecedente ó cada consequente, ó cada razón, ó cáda término *homólogo*, esto es, que tiene la misma razón, el mismo orden, la misma posicion relativa, el mismo nombre; ó en fin cada término por cada término de otra proporcion, las sumas ó los resíduos en la una, los productos ó los quocientes en la otra, quedarán siempre en proporcion de su género; lo que es facil de exemplificar, y con los mismos exemplos, y aun sin ellos, de demonstrar mediante lo dicho antecedentemente; y porque las razones y las proporciones son de tanta importancia en el estúdio y en la práctica de las ciéncias mathemáticas, es preciso imponerse en sus principales propriedades, y proponerse vários exemplos que las hagan manifiestas, y conduzcan á asegurarse y enterarse en ellas. Vease un caso particulár de esta proposicion.

Si hai muchas razones iguales, la suma de todos los antecedentes será á la suma de todos los consequentes, como un antecedente qualqiuera es á su consequente.

Si $2:3=4:6=8:12=10:15$: será $24:36=2:3$. Siendo $2:3-4:6$, si se aumentan los términos de la primera razón, con términos que tengan entre sí lá misma razón, las sumas conservarán siempre la misma razón como se ha visto: de suerte, que $2+4:3+6=2:3$, y assí en adelante con quantas razones iguales hubiere.

DE

DE LAS POGRESSIONES ARITHMETICAS.

SI en una pogresion arithmética se escogen quatro términos qualesquiera que formen una proporcion arithmética, los dos primeros distarán igualmente entre sí en la progression que los dos últimos; pues habiendo proporcion, la diferencia del primero al segundo será igual á la diferencia del tercero al quarto, y essas diferéncias serán ó la misma de la progression ó una multipla de ella; uno y otro arguye igual distáncia entre sí de los términos de cada razón.

La proposición inversa es tambien verdadera. En toda progression arithmetica, la suma de los extremos y la de dos intermédios igualmente distantes de los extremos, son iguales entre si. En la pogresion $\div$ 21, 18, 15, 12, 9, 6, 3, 0, la suma da los extremos $21 + 0 = 18 + 3 = 15 + 6 = 12 + 9$, &c, y si la pogresiom tiene un número impár de términos, el doble del término medio igualará también la suma de los médios igualmente distantes, ya de los extremos, ya del término médio. Sigue esto de las dos proporciones antecedentes.

Qualquiér término es igual al primero de la pogression arithmética *mas ó menos* la diferéncia común multiplicada por el númeio de términos hasta aquel de que se trata, exlusive; el *mas* es para la progression ascendente, el *menos* para la descedente, v.g. $21 = 0 + 3 . 7$, en la otra.

La diferéncia entre el primero y el último tér-

término es igual á la diferéncia común multiplicada por el número de términos menos uno , v.g. - - - - $21 - 0 = 3 . \overline{8 - 1}$

La suma de todos los términos de una progresion arithmética , es igual á la mitad del producto de la suma de los extremos por el número de términos ; v,g. $\frac{\overline{21+0} . 8}{2} = \overline{21} . 8 : 2 = 84$ es la suma de la progresion arithmética antecedente ; y si uno de los extremos fuere o , la suma de todos los términos será igual al producto del otro extremo , por la mitad del número de términos.

En general de 7 cantidades que se pueden considerár en toda progression arithmética.

El primér término.
La diferéncia común.
El número de términos.
El último término.
La suma de todos.
Un término qualquiera.
El lugár de aquel término.

Conocidas tres qualesquiera de las cinco primeras, se hallarán las demas con solo hacer atencion y valerse de lo ya dicho , lo que resuelve 40. questiones distintas que se pueden formar.

Tomando tres qualesquiera dc las siete , salen 140 questiones , pero no todas se pueden resolver. v.g. dados un término qualquiera , su lugar , y la diferencia común , no se podrá hallar el ultimo término , ni la suma , ni el número de términos ; si

solo el primér témino que se hallará igual á la diferéncia entre la suma del término dado y de la diferéncia común, y el producto de la diferéncia común por el lugar del término.

Exemplo del primér caso, dadas tres de las cinco primeras hallar las demas quatro.

El primér término de una progression arihmética es o; el último 99; la diferencia común 3; pídense el número de términos, la suma de ellos, y el valór del término 21.º

Siendo la diferéncia del primero al último $99-0$ igual 3 (diferéncia común) multiplicados por el número de términos, que llamaré N, menos 1; se escribirá esso mismo, $99-0=3, N-1$; luego partiendo $99-0$, esto es, 99 por 3 será - - - $99:3=N-1$, esto es, $33=N-1$, y añadiendo 1 de cada lado $34=N$; son pues 34 términos los que componen la progression.

La suma de ellos será como hemos dicho - - - $\frac{99 \cdot 34}{2}=1683$.

El término 21º. en el orden, contando desde el primero, será $0+3 \cdot 20=60$; se toma 20 porque se busca el término 21.º

Basta lo dicho, y acabaré esto de las progressiones arithméticas con el siguiente méthodo de formarlas en caso que ofrece la práctica, y es una de las questiones de que se acaba de hacer mencion.

Entre dos números propuestos establecer una progression arithmética de un número fixo de terminos, esto es dados el primero y el último tér-

mi-

minos de una progression arithmética que ha de ser, y el número de términos que ha de tener, hallar la diferéncia común, los términos, y en fin formar la progression. El primér término es 9; el último 75, la progression ha de tener en todo 14 términos, luego se han de formar 12. Segun lo dicho arriba, tendremos $\frac{75-9}{13} = 5\frac{1}{13}$. esta es la diferéncia común de essa progression arithmética ascendente, cuyo primer término es 9; luego el segundo será $9 + 5\frac{1}{13} = 14\frac{1}{13}$, y assí para los demas términos, y la progression será la siguiente.

$$\div 9, 14\tfrac{1}{13}, 19\tfrac{2}{13}, 24\tfrac{3}{13}, 29\tfrac{4}{13}, 34\tfrac{5}{13}, 39\tfrac{6}{13},$$
$$44\tfrac{7}{13}, 49\tfrac{8}{13}, 54\tfrac{9}{13}, 59\tfrac{10}{13}, 64\tfrac{11}{13}, 69\tfrac{12}{13}, 75.$$

La demonstracion de todas essas propriedades de las progressiones arithméticas es clara despues de las definiciones y proposiciones que han precedido, y seria repetir lo dicho el querer demonstrarlas cada una de por sí.

DE LAS PROGRESSIONES GEOMETRICAS.

Si en una progression geométrica se escogen quatro términos qualesquiera, que formen una proporcion geométrica, distarán los dos primeros entre sí, en la progressiion, tanto como los dos últimos.

Demonstracion. Ya que hai proporcion, las dos ra-

razones son iguales , y su exponente ó será el mismo de la progression , si los dos términos de cada razón fuessen immediatos , ó será multíplice de él , si fuessen distantes ; pero será equimultíplice por ser las razones iguales , lo que arguye igual distáncia entre los dos términos de cada razón.

La proposicion inversa es también verdadera: En toda progression geométrica , el producto de los extremos y él de dos términos intermédios igualmente distantes de los extremos , ó (si el número de términos es impár) el quadrado del término medio son iguales entre sí.

En la progression geométrica ∺ 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : 128 : 256 : 512 : 1024 ; el producto de los extremos 1024 . 1 es igual á 2 . 512 ; á 4 . 256 &c , y tambien al quadrado del término médio 32.

Demonstracion. Siendo una progression geométrica , una verdadera proporcion contínua continuada , en que cada término es consequente de aquél que le precede , y antecedente de aquél que le sigue , y por lo mismo , habiendo la misma razón entre qualesquiera dos términos immediatos , que la común de la progression , el primero será al segundo, como el penúltimo al último , y el segundo será al tercero , como el antepenúltimo al penúltimo ; luego será el primero al tercero , como el antepenúltimo al último , y lo mismo se dirá de otros qualesquiera términos igualmente distantes de los extremos , y por consiguiente el primero será al médio como este mismo al último , si es el número de términos impár.

En todas estas proporciones particulares el produćto de los extremos es igual al produćto de los médios, lo que es la proposicion establecida.

Qualquiér término de una progression geométrica qualquiera es igual al primér término partido por el exponente elevado á una potestad igual al número de términos que le preceden.

Sea la progression $\div$ 64 : 32 : 16 : 8 : 4 : 2 : 1 : $\frac{1}{2}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{8}$. El término 8 será $=\frac{64}{3}$.

Si se toma la progression [2] al revés, ó ascendente $\div$ $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2}$: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64; el mismo término 8 ya puesto en otro orden es $=\frac{1}{8}$ ó á $\frac{\frac{1}{8}}{\left.\frac{1}{2}\right]^6}$ partido por $\frac{1}{2}$ elevado á la potestad sexta por ser seis los términos que preceden. La potestad sexta de $\frac{1}{2}$ es $\frac{1}{64}$, y partido $\frac{1}{8}$ por $\frac{1}{64}$ será el quociente $\frac{64}{8}=8$.

Tómese otra progression ascendente $\div$ 2 : 3 : $4\frac{1}{2}$: $6\frac{3}{4}$: $10\frac{1}{8}$: $15\frac{3}{16}$, cuyo exponente es $\frac{1}{3}$; el término $10\frac{1}{8}$ será igual $\frac{2}{\left.\frac{2}{3}\right]^4}$, esto es, 2 partidos por $\frac{16}{81}$ que dàn por quociente $\frac{162}{16}=10\frac{1}{2}$.

Demonstracion. En una progression geométrica, qualquiér término es el quociente de su antecedente partido por el exponente de la progression; el segundo término es igual al primero partido por el exponente; el tercér término es igual al segundo partido por el exponente; esto es, al primero partido por el exponente, y el quociente partido por el exponente; esto es, al primero partido por el produćto del exponente por el expononte; ó por el quadrado del exponente; el quarto término se ha-

hallará igual al primér término partido por el cubo del exponente: y ássí qualquiér termino será igual al primero partido por la potestad del exponente igual al número de términos que preceden.

La diferéncia entre los dos términos extremos de una progression geométrica, es igual á la suma de todos los términos menos el primero, tomada tantas veces, quantas unidades menos una tubiere el exponente.

En la progression ascendente ya puesta ∺ $\frac{1}{8}$: $\frac{1}{4}$: $\frac{1}{2}$: 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64 : la diferéncia entre los extremos es $63\frac{7}{8}$; la suma de todos los terminos menos el primero es $127\frac{3}{4}$; se ha de tomar $\frac{1}{2}$ vez menos 1 vez, esto es—média vez ó su mitad afectada del signo menos, y será—$63\frac{7}{8}$.

Demonstracion. La diferéncia del primér término al último es con evidéncia la suma de las diferéncias del primero al segundo, del segundo al tercero, del tercero al quarto, &c, hasta la del penúltimo al último. pero cada diferéncia particulár es igual al consequente multiplicado por el exponente menos 1, como se ha dicho; luego la diferéncia total ú del primér término al último es igual á la suma de todos los consequentes, esto es, de todos los términos menos el primero multiplicada por el exponente menos 1.

La diferéncia entre los dos primeros términos de una progression geométrica es á la diferéncia entre los extremos, como el primer término es, ó la suma de todos los términos menos el último.

Demonstracion. Todos los términos son ante-

ce-

cedentes menos el último, y todos son consequentes menos el primero, y la suma de los antecedentes es á la suma de los consequentes, como el primér término es al segundo, por lo demonst. luego el primero es á la diferéncia entre los dos primeros, como la suma de los antecedentes, es á la diferencia entre las dos sumas: la de los antecedentes es á la de todos los términos menos el último; la de los consequentes es la de todos los terminos menos el primero; la diferencia entre las dos sumas es la diferencia entre los extremos, por ser los demas términos, comunes á ambas sumas, en la una por antecedentes, y en la otra por consequentes; luego el primer tsrmino es á la diferencia entre los dos primeros, como la suma de todos menos el último, es á la diferencia entre los extremos, lo que invirtiendo y alternando da la proporcion enunciada.

En la progression $\div\!\!\div$ 5 : 25 : 125 : 625 : 3125 : 15625 : se verá que 20 : 15620 = 5 3 : 905, que es la suma de tados los terminos menos el último.

Si la progression va disminuyendo hasta el infinito, el último término infinitamente pequeño, se puede considerar como nulo, y entonces la diferencia entre los dos primeros, será al primero, como este mismo á la suma de todos; de esta suerte si la progression es $\div\!\!\div \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16}$, &c, su suma se hallará = 1 : si fuere la progression $\div\!\!\div 1 : \frac{1}{2} : \frac{1}{4} : \frac{1}{8} : \frac{1}{16} :$ &c, su suma será = 2,

La suma de todos los términos de una progression geometrica es igual al primer termino mul-

ti-

tiplicado por el éxponente comun, y el producto, m nos el término último, partido por el exponente menos 1.

Dsmonstracion. Siendo la suma de los antecedentes á la de los consequentes, como el primér término al segundo, se sigue que la suma de los antecedentes multiplicada por el segundo término es igual á la suma de los consequentes multiplicada por el primér termino; esto es, todos los términos, menos el último, multiplicados por el segundo, hacen un producto igual á todos los términos menos el primero, multiplicados por el primero. Pero ya se sabe que el segundo término es el primero partido por el exponente, (sea la progression ascendente, sea descendente) luego la suma de todos, menos el ùltimo, multiplicada por el primero partido por el exponente, es igual á la sumr de todos, menos el primero, multiplicada por el primero: ambas cantidades van multiplicadas por el primero, y si se parten por el, quedarán todavia iguales, la suma de todos, menos el último, partida por el exponente, y la suma de todos, menos el primero; muliplíquese cada una por el exponente, y será la suma de todos menos el último, igual á la suma de todos menos el primero, multiplicada por el exponente; añadáse á cada una el producto del primero por el exponente, y restese de cada una la suma entera; se hará el producto del primero por el exponente, menos el último termino, igual al producto de la suma por el exponente, menos la suma. La suma por el exponente, menos la suma, es la suma multiplicada por el exponente menos 1, luego partiendo ambas canti-

dades iguales por el exponente menos 1, quedará, la suma de todos igual al producto del primer termino por el exponente, menos el último termino, toda essa cantidad partida por el exponente menos 1.

En la progression ÷÷ 64 : 32, &c, el primer termino 64 múltplicado por el exponente común, 2 hace 128, quitandole el termino último $\frac{1}{8}$ quedan $127\frac{7}{8}$ partiendole por el exponente menos 1, esto es, por 1 queda la misma cantidad $127\frac{7}{8}$ igual con efecto á la suma de todos los terminos.

En la progression ÷÷ $\frac{1}{8} : \frac{1}{4} : \frac{1}{2} : 1 : 2 : 4 : 8 : 16 : 32 : 64$: la suma de todos los terminos será $\frac{1}{8}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\frac{1}{16} - 64:}{\frac{1}{2} - 1} = \frac{-63\frac{15}{16}}{-\frac{1}{2}} = 127\frac{7}{8}$.

En la progression ÷÷ 1 : 3 : 9, &c, arriba expressada, lo mismo se encontrará con el exponente $\frac{1}{3}$, y se hallara ser la suma 3280.

La prueba ó demonstracion que acabamos de dar es exacta parecerá quizas algo dificil en estos principios; pero con un poco de aplicacion lo dexará de parecer, y atendiendo bien á los fundamentos de la progression geometrica, bastarán las propriedades dichas para resolver las questiones de mayór uso, que se suelen ofrecer en el asumto, v.g.

Para hallar la suma de todos los terminos, conociendo el primero, el exponente común, y el número de ellos: se multiplicará el primer termino por el exponente elevado á la potestad indicada por el número de terminos; se restará de esse producto el primer termino, y el resíduo partido por

el

el exponente menos 1, dará al quociente la suma pedida. Sea 5 el priemer término; 5 el exponente común, y el número de terminos; $5 \cdot 5^6 = 78125$, quitando 5 quedan 78120, que partidos por $5-1$. esto es, por 4, dan 19530 por la suma de los terminos.

Hallar el número de terminos conociendo los extremos, y el exponente. Si este es número entero, la progression es descendente; si es quebrado la progression es ascendente; en uno y otro caso se conocerá qual es el primer termino de los dos dados por extremos: multiplíquese el primer termino por el exponente, partase el producto por el último termino, y el quociente será el exponente elevado á una potestad de tantas unidades, quantas tiene el número de terminos: luego elevando el exponente á sus succesivas potencias, se encontrará una igual al quociente; el número que designa essa potencia, es el número de terminos de la progression; v.g. los extremos son 1458, y 2; el exponente es 3; luego la progression es descendente; el primer termino es 1458; el último es 2 El producto del primero por el exponente es 4374, que partido por 2 da el quociente 2187. Elevese 3 á sus potestades segunda, tercera, &c, hasta encontrar una que sea 2187, y se hallará ser la septima; luego el número de terminos de la progression es 7, y en efecto la progression es ÷ 1458 : 486 : 162 : 54 : 18 : 6 : 2; si con los mismos extremos 1458, 2 se da el exponente $\frac{1}{3}$, la progression será ascendente, el primer termino 2, el último 1458,

la

la operacion es la misma $2. \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$: este producto $\frac{2}{3}$ partido por 1458 es $\frac{2}{4374} = \frac{1}{2187}$ septima potestad de $\frac{1}{3}$; luego los terminos son 7, &c, como la progression antecedente tomada al reves.

Hallar el exponente, conocidos los extremos y el número de términos; partaso el primer extremo por el último; ya se sabrá qual será el primero, según se quisiere progression assendente ó descendente; y la raíz del quociente de un grado igual al número de terminos, menos 1, será el exponente de la progressíon. En el mismo exemplo antecedente de una progression descendenre, son conocidos 1458, y 2 los extremos, y 7 el número de terminos; partiendo 1458 por 2, viene al quociente 729, la raíz sexta $\sqrt[6]{}$ de 729 es 3, que es el exponente que se pide. Se verá mas adelante el metodo de sacar qualquiera raíz con facilidad por los logarithmos.

Esta question es la misma que la siguiente expressada en otros terminos, á lo menos vienen á lo mismo.

Entre dos números propuestos establecer una progression geometrica de un número fixo de terminos. Pues se dan los extremos, y el número fixo de terminos, luego se hallará el exponente, y con este el segundo termino, el tercero, &c, v.g. entre 1 y 9765625 extremos de una progression ascendente se piden 9 terminos, de suerte, que con los dos extremos dados conste la progression de 11 terminos; el primer termino 1 partido por el último 9765625 da $\frac{1}{9765625}$ por quociente, y porque deben ser 11 los terminos quitando 1 queda-

rán

ran 10; luego la raíz decima $\sqrt[10]{\frac{1}{9765625}}$, que se halla ser $\frac{1}{5}$ será el exponente de la progression, y assí será esta ∺ 1 : 5 : 25 : &c. . . 9765625.

La demonstracion sigue de la que se ha dado.

Pudieramos considerar tambien las distintas cantidades, que ofrecen las progressiones geometricas, y reparar en las questiones que se pueden resolver por medio de ellas diversamente combinadas como lo hemos advertido de passo, acerca de las arithmeticas; pudieramos añadir otras propriedades de las muchas que encierran las progressiones; pero nos hemos de acordar, que esto es un compendio, y que basta la que se ha dado para el fin que nos debemos proponer.

DE LAS REGLAS DE PROPORCION.

Las reglas de proporcion son el methodo de hallar un termino que falta en una proporcion, conocidos los otros tres. El termino que falta será pues un extremo ó un medio, y siempre se puede hacer que sea un extremo, y porque en la proporcion arithmetica, la suma de los extremos es igual á la suma de los medios, debe el termino que se busca hacer con el de la misma situocion (en quanto á extremo, ó medio que está conocido) una suma igual á la de los otros dos; luego restando de essa suma el término solitário, quedará el término que se busca; ú de otro modo ordenando los términos conocidos, de suerte que quede por último

mo el que se busca, se tomará la diferéncia del primér antecedente á su consequente, y porque debe de haber la misma del segundo antecedente á su consequente, se añadirá ó se quitará essa diferéncia del tercer término, segun las razones fueren de menór ú de mayór desigualdad, y la suma ó el resíduo será el quarto término. v.g. se quiere un número *N* que esté en proporcion arithmética con estos tres 7, 15, 21, de manera que 7, 15 = 21, *N*.

De la suma 36 de los médios, restese el extremo conocido 7, y lo que quedare 29 será el término *N*. de suerte que 7, 15 = 21, 29: del otro modo de 7 á 15 van 8, luego de 21 al quarto término ha de haber la misma diferéncia 8, y porque son las razones de menór desigualdad, añadanse los 8 al término 21, y será 29 el quarto término que se pide. Si la progression fuere continua, se verá facilmente el méthodo de encontrar qualquier término que falte, pues una proporcion continua es, como lo hemos dicho repetidas veces, una proporcion discreta, cuyos medios (por ser la misma cantidad) no se escriben mas de una vez, que sirve de cosequente á la primera razón, y de antecedente á la segunda.

En la proporcion continua basta conocer dos términos, ó sean los extremos para hallar el médio proporcional, ó sean un extremo, y el medio proporcional para hallar el otro extremo. En el segundo caso, tomando el medio por segundo y tercer terminos, serán 3 los conocidos: en el primero el médio que se busca es la mitad de la suma de los

ex-

extremos dados.

Estas operaciones siguen imediatamente de la definicion y de lo demonstrado sobre la proporcion; á esto quasi se reduce lo que hai que decir sobre las reglas de proporcion arithmética; pero en la geométrica se dan várGios casos, frequentes ó importantes, que tienen sus reglas á parte.

La primera es la *Regla de tres*, en la que dados tres términos, se pide un quarto término, que con los tres conocidos haga una proporcion, ordenados los términos. Es simple en tal caso, quando no son mas de quatro los términos de la question; es compuesta quando hai mas términos, y se llama siempre regla de tres, porque se reduce siempre á no tener mas de tres términos conocidos, y uno que se busca; ambas suelen dividirse en *directa*, é *inversa*; pero no existe tal regla de tres inversa, y quando se da el caso que llaman assí, es una directa, cuyos términos no están bien ordenados, ó porque se pide un termino que se considera como extremo, y que debe ser un médio ó porque las dos razones, que deben formar la proporcion, son con efecto, *reciprocas* en lo concreto, esto es considerando solamente los números en sí; y á essas razones recíprocas las llaman tambien *inversas* con tèrmino menos adequado; pero de qualquiér suerte estando bien ordenados los términos de la proporcion, siempre se reducirá y se deberá reducir á una directa; pues solo dos razones iguales forman una proporcion, y siendo reciprocas no son iguales antes de haber invertido los términos de la una, de

donde nace la proporcion directa con sus quatro términos ordenados : v.g. si 40 hombres hacen una excavacion en 12 dias, 20 hombres gastarán en hacerla 24 dias, porque con la mitad del número de trabajadores, se necesitará el doble del tiempo, y la razón entre trabajadores será reciproca de la razón entre los días de trabajo de cada número de ellos. La razón 40 : 20 es reciproca de 12 : 24; esto es, =24 : 12, pero no se puede decir que hai proporcion, ni reciproca, ni de otra suerte entre 40 : 20 ; 12 : 24 : en essa orden, porque no hai proporcion ; la habrá sí, la unica que puede haber directa, invertiendo los términos de una de las razones 40: 20=24 : 12 ; y si se propone la regla de tres assí: 40 hombres acaban una obra en 12 dias, 20 hombres en quantos dias la acabarán? Con la atencion precisa para qualquiera operacion se verá, que pues tantos mas dias se piden quantos menos hombres se émplean, se deben ordenar los términos ó números dados en esta forma, 20 : 40=12 : N número de dias que se busca. En fin la proporcion no pende del lugar ni del orden en que colocan cada término al proponer la question, si solo del que debe ocupar en sí, y para formar razones iguales.

En la regla de tres, ordenados los tres términos que se dan, de suerte que él que se busca sea un extremo, se multiplicarán los médios entre sí, y partiendo el producto por el extremo conocido, saldrá al quociente el extremo pedido ó el quarto término de la proporcion,

En

En la regla de tres antecedente 20 hombres, á 40 hombres, como 12 dias á un quarto término se formará el producto de 40 por 12, que será 480, este se partirá por 20, y el quociente 24 será el término que se busca.

Luego en la regla de tres no se ha de atender en si es discreta, ó como dicen reciproca, solo sí, en ordenar bien los términos: 60 millas hacen 20 leguas: 200 millas quantas leguas haran? Es evidente que mas millas hará mas leguas, y que aumentandose el número de las unas debe aumentar el número de las otras en la misma razón; por consiguiente $60:200=20:N$, con tal que $60.N=200.20$, luego partiendo una y otra cantidad, por 60, quedarán los quocientes iguales; $\frac{60.N}{60}=$, esto es $N=\frac{200.20}{60}$, que indica ser el quarto término igual al producto de los médios partido por el extremo conocido; hecho el cálculo se hallará $N=66\frac{2}{3}$ leguas.

Instaré sobre la pretendida regla de tres inversa con otro exemplo. Auna pared que se ha de levantar, si se le ponen 15 hombres, se acabará la obra en 60 dias; no se eucuentran mas de 7 hombres, pregúntase en quantos dias se ha de acabar: se ve luego que con menos hombres tardará la obra mas dias, y que el mayór número de dias que se busca debe ser al menór número de ellos que se conoce, en la misma razón que el mayór

numero de hombres, es al menór número de ellos; disponganse los términos de la regla como se quisiesse; pero de modo que el producto de los que fueren medios sea igual al producto de los que fueren extremos, y estarán siempre bien dispuestos, y la proporcion ordenada. Porque el número *N* de dias que se busca debe ser mayór que 60, debe con el menór 7 de honbres hacer, ó los extremos, ó los medios luego se pueden dár las ocho disposiciones siguientes á los términos.

$N : 60 = 15 : 7$	$60 : N = 7 : 15$
$N : 15 = 60 : 7$	$15 : N = 7 : 60$
$15 : 7 = N : 60$	$7 : 15 = 60 : N$
$60 : 7 = N : 15$	$7 : 60 = 15 : N$

En qualquiera de ellas siempre se multiplicarán 60 por 15, términos, ya medios, ya extremos, y el producto 900 se partirá por 7, ya extremo, ya medio, de cuya particion saldrá el valor de *N* al quociente $128\frac{4}{7}$.

Hemos dicho ya que la regla de tres compuesta ofreçe mas de tres términos fuera de aquel que se busca, pero que siempre se puede, y con facilidad reducir á una simple de á tres términos conocidos; daremos de esso algunos exemplos con diferentes cantidades de términos.

100 hombres trabajando 8 horas cada dia acaban en 40 dias uno cierta obra; 50 hombres con 6 horas de trabajo por dia en *quantos dias* aca-

ba-

barán la misma obra? Aquí parecen 5 términos fuera de aquel que se busca; pero con que facilidad se reducen á tres términos dados, y uno que se pide? En efecto 100 hombres con 8 horas de trabajo al dia son 800 horas de trabajo al dia, así como 70 hombres de á 6 horas son 420 horas de trabajo por dia; luego la question se reduce á esta; una obra en que trabajan 800 horas al dia se acaba en 40 dias, si no se trabaja mas de 420 horas por dia, quantos dias durará? Lo que se aplicó á horas puede también atribuirse á hombres, y decir 800 hombres tardan en una obra 40 dias, 420 hombres quantos dias tardarán? Porque 100 hombres que trabajan 8 horas en el dia hacen lo mismo que 800 hombres que trabajan 1 hora en el dia. Reducido el número de términos, se ordenarán en esta forma: la cantidad menór de hombres tardará mas dias; luego 420 : 800 = 40 : N, que será igual á $\frac{800 \cdot 40}{420} = \frac{32000}{420} = 76\frac{4}{21}$ dias.

En 83 dias 250 hombres gastaron 10375 pesos, *quanto* gastarán 715 hombres en 36 dias? La causa del gasto 10375 pesos es 250 hombres sumados 83 veces por los 83 dias, esto es, 250 . 83 = 20750; y la causa de otro gasto que se busca será 715, número de hombres multiplicado por 36, número de dias, esto es, 25740, y los tres términos dados de la regla de tres compuesta y reducida, son 20750; 10375; 25740. Para orde-

nar-

narlos, se reparará que á mayór número de hombres por dias corresdonde mayór gasto; luego el número N, que se busca, ha de ser mayór que 10375, y por consiguiente si se toma por extremo N, el otro extremo debe ser el número menór de hombres por dias 20750: si se tomará N por un médio, tambien seria 20750 un médio, y porque en qualquier parte que se coloquen estos dos términos, su prodduçto debe ser igual al produçto de las otras dos cantidades, se formará este segundo produçto, que se hallará ser 267052500; y se partirá por 20750; el quociente 12870 será el número N, gasto de los 715 hombres en 36 dias.

Se ofrecerán reglas de tres aún mas compuestas, pero igualmente faciles de reducir. *Por exemplo*, 7 hombres con trabajar 6 horas al dia acabaron en 5 dias un fosso de 12 varas de largo, tres de ancho, y 2 de alto; llenando justamente 72 canastas ó cestones de la tierra del fosso, porque con cada excavacion de 1 vara en largo, de 1 en ancho, y de 1 en alto tomada á parte se llenaba un cestón, y que en 12 de largo, 3 de ancho, y 2 de alto (multiplicando estos tres números entre sí) se hallan 72 veces distintas, 1 vara de largo, 1 de ancho y 1 de alto; se quieren ocupar 10 hombres por 15 dias á 8 horas de trabajo en cada dia á cavar otro fosso que tenga 4 varas de ancho y 4 de alto, y se desea saber que largo harán de esta escavacion que se proyeçta.

En 6 horas cada dia 7 hombres son 42 agentes en 1 hora ó 42 horas de trabajo de 1 hombre

so-

solo, que repetidos 5 veces por los 5 dias, montan á 210. La tierra sacada del fosso con sus tres medidas multiplicadas entre sí ocupa 72 cestones. Los 10 hombres que se proponen por 15 dias y 8 horas de trabajo en cada dia hacen 1200 agentes ú horas de trabajo, y se desea saber que excavacion harán? La question está ya reducida á una regla de tres simple. 210 agentes excavando llenan 72 cestones, 1200 agentes quantos llenarán? Han de ser mas de 72; luego *N* que los representa, debe con 210 menór número de agentes formar un producto igual al producto de los otros dos términos, 1200 por 72; este es 864000, que partidos por 210 dan al quociente 411 $\frac{3}{7}$ cestones, que se llenarán con la excavacion que harán los trabajadores; y la proporcion es $210 : 72 = 1200 : 411 \frac{3}{7}$.

Este número de cestones es el producto del largo de la excavacion por el ancho, y de este primér producto por el alto; pártase el número hallado por 4 que es el alto dado, y saldrán al quociente 102 $\frac{6}{7}$ producto del largo por el ancho, pártase este por 4 el ancho dado, y el quociente $25\frac{5}{7}$ será el largo de la excavacion en varas, cantidad que se buscaba.

La segunda regla es la de *compañía*. Su fin es distribuir con acierto un interés total entre vários interesados, en razón de lo que á cada uno toca, por distintas condiciones que puede y suele haber. Dos personas han puesto 20000 pesos en cierto comércio; el primér interesado 14000, el segundo 6000; ganaron 8000 pesos, y quieren

par-

partir en la misma razon que han contribuido; luego se ve que el fondo total es á cada fondo particular, como la ganáncia total á cada ganáncia particular, y assí.

$$20000 : 14000 = 8000 : N = 5600$$
$$6000 = \quad n = 2400$$

Suele haber en estas reglas de compañia variedad de tiempo; unos ponen su caudal por mas tiempo ó antes, otros por menos tiempo ó despues.

Un comerciante puso 20000 pesos; al cabo de 5 meses cedió 6000 á otro, y pasados otros 3 meses, cedió, de lo que le quedaba en la sociedad, otros 3000 á un nuevo interesado. La compañia duró 7 meses desde la última cession, esto es, 15 desde que el comércio se empezó, y la ganancia fue de 8000 pesos; se pregunta, quanto toca á cada uno segun el interés que ha tenido en la compañia, y el tiempo que ha corrido esse interés, sin atencion á los intereses de intereses, esto es, al producto de las ganancias ya adquiridas al tiempo de entrar el segundo y el tercero en la sociedad.

Si 20000 pesos en 15 meses ganaron 8000, los 3000 últimos en 7 meses quanto habrán ganado? Los 6000 antecedentes en 10 meses quanto habrán ganado? Halladas las ganancias del tercero y del segundo interesados, lo restante de la ganáncia es la del primero, y si se quiere también determinar su ganáncia á parte, se buscará la de---- 20000 en 5 meses; luego la de 14000, que le que-

quedaron despues de la primèra cession en 3 meses, y en fin los 11000 que guardó ultimamente en los últimos meses; para cada ganáncia hai una regla de tres compuesta que se reduce á simple, multiplicando el dinero por los meses, por ser unos y otros causas de la ganáncia, y se formarán las reglas siguientes.

300000 :	21000=8000 :	560	ganánc. del 3.	
300000 :	60000=8000 :	1600	ganánc. del 2°.	
300000 :	100000=8000 :	$2666\frac{2}{3}$	} ganánc. del 1°.	
300000 :	42000=8000 :	1120		
300000 :	77000=8000 :	$2053\frac{1}{3}$		
		8000	Suma de las	

ganáncias psrticulares igual á la ganáncia total.

La tercera regla es la *de falsa posicion*, cuya definicion adequada procuraré dar aquí, por no haberla encontrado en Autor alguno.

Es una regla que enseña, ó á dividir un número conocido en partes de exponente reciproco dado, pero cada una de valór indeterminado, y dependiente del valór de las demas partes, ó á encontrar un número, conociendo alguna *funcion* de ciertas partes suyas, de exponente determinado.

Funcion es una cantidad formada de dos ó mas cantidades, por qualquier operacion que sea; siendo indeterminada en sí la una de ellas, la funcion es funcion de ella.

Quatro personas partiéron cien mil pesos en-

 tre

tre sí ; la segunda tuvo el doble de lo que tocó á la primera ; la tercera tuvo tres veces tanto como la segunda , mas dos veces la parte de la primera ; la quarta tubo quatro veces la parte de la tercera, mas tres veces la de la segunda , mas dos veces la de la primera : se pregunta quanto tocó á cada una?

Es dividir cien mil pesos en quatro partes , de las quales cada una ha de ser tal ó tal respecto de las demas , y tanta ó tanta segun el valór de ellas, como lo dice la primera parte de la definicion.

Pídese un número con la ley que su tércio , su quarto , y su quinto juntos hagan 100,

Se determinan las partes $\frac{1}{3}:\frac{1}{4}:\frac{1}{5}$; la funcion conocida de ellas es que su suma$=$100 , lo que explica la segunda parte de la definicion.

El arte para resolber essas questiones (y el origen del nombre impuesto á la regla) consiste en *poner* un número *falso* , pero qualquiera, que satisfaga ó no , y hallándose que no satisface , valerse de él para encontrar el verdadero, por la semejanza de relacion entre el falso y sus partes , y el verdadero y las suyas ; unas veces basta una falsa posicion, otras veces se necesitan dos , de donde nace la distincion de essa regla en *simple* y *doble*.

Propónese la segunda question puesta arriba: tomemos un número que tenga tercio , quarto , y quinto , sin quebrado , el que se encontrará multiplicando entre sí los denominadores de los quebrados dados $\frac{1}{3}$; $\frac{1}{4}$; $\frac{1}{5}$; esto es , 3 , 4 , 5 , que hacen 60 ; su tércio es 20 ; su quarto 15 ; su quinto 12;

la

la suma de ellos es 47, que no es 100; luego 60 es posicion falsa, pero la suma 47 tiene con su origen 60, la misma razón que 100 con el número que se busca, y $47 : 60 = 100 : N$; hecha la regla de tres vendrá $N = 127\frac{31}{47}$.

Su tercia parte es. . . .	$42\frac{26}{47}$
Su quarta.	$31\frac{43}{47}$
Su quinta.	$25\frac{25}{47}$
Suma.	100

Sea ahora la primera question la que se propone; partir cien mil pesos, &c: *pongamos* el número *falso* 1 por la parte del primero; luego el segundo tuvo 2; el tercero 8; el quarto 40; la suma de estas partes es 51, que está bien lexos de 100000; pero servirá á dividirlos; pues hai la misma razón de 51 á cada una de sus partes, que de 100000 á cada correspondiente de las suyas, y formando tantas reglas de tres como Partes hai que hacer, se determinará la de cada uno de los que han de partir.

$$51 : 1 = 100000 : 1960\tfrac{40}{51}$$
$$51 : 2 = 100000 : 3921\tfrac{29}{51}$$
$$51 : 8 = 100000 : 15686\tfrac{14}{51}$$
$$51 : 40 = 100000 : 78431\tfrac{19}{51}$$
$$100000$$

En questiones semejantes tomando 1 por la parte del primero, la operacion sale menos molesta,

 por.

porque hallados $1960\frac{40}{51}$, se multiplicará esta cantidad por los números 2, 8, 40, sin mas regla de tres, y saldran las demas partes que se buscan.

Una, y otra regla es *simple*, que se resuelve con una sola falsa posicion; la que sigue es *doble*.

Tres barcos distantes entre sí llevaron de uno en otro una noticia importante á 2000 leguas; el segundo caminó al doble del primero, y 32 leguas mas; el tercero caminó tanto como los dos primeros, menos 120 leguas; quanto caminó cada barco?

Supóngase que el primer barco haya caminado . . . . . 300 leguas; luego el segundo caminó 632
y el tercero. 812

Suma. . 1744, que debiera ser 2000; luego la suposicion es falsa, y la suma que subministra es menór que la verdadera en 256.

Aquí no cabe la regla de tres que en los exemplos antecedentes dió la solucion; se dirá luego por que? haciéndola se verá que no satisface, pues $1744 : 300 = 2000 . 344\frac{64}{1744}$, y tomando este último término por el camino del primér barco, el segundo habra andado $720\frac{128}{1744}$, el tercero $944\frac{192}{1744}$; la suma de los tres será $2008\frac{384}{1744}$ mayór que la verdadera.

En estos casos se hace otra falsa posicion; sea

v.g. lo andado por él primér barco 310 ; luego el segundo habrá andado. 652
el tercero. 842
Suma. . . . . 1804 en lug. de 2000.

La segunda suposicion es igualmente falsa, y menór que la verdadera en 196.

Pero la diferéncia de las diferéncias á la suma verdadera, es á la diferéncia entre los números supuestos, como una diferéncia á la suma verdadera, es á la diferéncia de su número supuesto al verdadero.

En números es $60 : 10 = 256 : N = 42\frac{2}{3}$, que sa ha de añadir á 300 ; luego será el camino del
primér barco . . . . $342\frac{2}{3}$ leguas
Del segundo . . . . $717\frac{1}{3}$
Del tercero 940
Suma 2000

Qualesquiera que sean las falsas posiciones, como puedan satisfacer á las condiciones de la question, darán siempre la misma solucion. En el caso presente, ponganse 100 por primér término ; luego en la 2ª falsa posicion el primero 110.

primero	100	110
segundo	232	252
tercero	212	242
Suma	544	604
Su diferéncia á	2000	2000
Es	1456	1396

La

La diferéncia de las diferéncias es á la diferéncia entre los números supuestos, como una diferéncia á la suma verdadera es á la diferéncia de us número supuesto al verdadero.

Esto es, $60 : 10 = 1456 : N = 242\frac{2}{3}$.

Luego el primér barco caminó $342\ \frac{2}{3}$, como se halló por las antecedentes suposiciones.

Dixe que las suposiciones habian de poder satisfacer á las condiciones de la question. v.g. en esta se ha de reparar que como del tercér número se han de restar 120, no se puede suponer el primér número menor de 30.

Una regla de falsa posicíon es doble quando haî en la questíon algun número dado que debe entrar con él de suposicion á satisfacer á las condiciones; en nuestro exemplo se hallan dos, 32, y 120: no habiendolos es simple.

La quarta regla es la de *aligacion*, al parecer menos útil á nuestro intento, por las aplicaciones que suelen hacer de ella los arîthméticos, á queestiones privadas; sin embargo puede ofrecerse en el servício del Rey, assí por tierra como por mar, y tanto para lo económico como para lo militar; conviene darla á conocer.

La regla de aligacion enseña á determinar ya el valor de una cantidad (ú de sus unidades) compuesta de otras de distinto valór entre sí y conocido; ya reciprocamente, quanto se ha de tomar de cada una de distintas cantidades de valór conocido, para formar un compuesto de cantidad y de valór dados.

Se

Se mezclan 18 quintales de pólvora á 4 reales de vellon la libra , 25 quintales á 3 reales la libra, y 12 quintales á 2 reales la libra ; qual debe ser el précio de la libra de esta mezcla? Es el primér caso de la regla.

Se ha de hacer una obra de 100 marcos de plata de á 140 reales vellón el marco , con barras de distinta ley , ú de diferente valór el marco, v.g. de 130 , 137 , 144 , 160 reales de vellón ; quanto metal se ha de tomar de cada una? Es el segundo caso de la regla.

En el primero no hai dificultad : se suman las cosas que se han de mezclar ; en el exemplo propuesto , 18 quintales + 25 + 12 hacen 55 quintales de pólvora ; se suman los précios particulares de cada cantidad de quintales , que son 7200 reales , 7500 , 2400. La suma es 17100 reales , valór de los 55 quintales de mezcla ; luego partiendo 17100 por 55 , saldrá el précio del quintal $310\frac{10}{11}$ reales , y él de cada libra será 3 reales $3\frac{71}{100}$ maravedis. (34 maravedis hacen un real de vellón.)

El segundo caso de la regla no es tan facil, y si las cosas que han de mezclarse son mas de dos , la question tiene várias soluciones , es *indeterminada.*; verdad es , que segun ciertas condiciones que se pueden poner , el número de soluciones es limitado ; pero no habiendolas serán muchas.

Daremos dos exemplos del segundo caso , el uno de dos cosas que se han de ligar , y el otro de mas de dos.

Exemplo primero. Con salitre , azufre y carbón

bón se hace la pólvora, que sale mas ó menos eficaz, según la proporcion que se guarda en las materias que la componen. La mejor por experiencia general pide $76\frac{1}{2}$ partes de salitre refinado, $12\frac{1}{2}$ de azufre, $12\frac{1}{2}$ de carbon, esto es, con muy corta diferéncia 6 de salitre, 1 de azufre, 1 de carbón, y se llama pólvora de 6 *as y as*. Habrá otra de 5 as y as menos salitre, con mas azufre y carbón; otra de 4 as y as, &c, cuyas proporciones ya se entienden.

Teniendo dos layas de pólvora, una de 6 as y as, otra de 4 as y as, se quieren componer 300 libras de otra pólvora de 5 as y as: se pregunta qnantas libras se han de tomar de cada una de las que hai. No se juzgue luego que se deban mezclar 150 libras de cada una, por parecer la que se pide, justamente média arithmética entre las otras dos, porque en la realidad no es assí. Cada libra de 6 as y as se divide en 8 partes iguales; 6 son de salitre, 1 de azufre, y otra de carbón, y se designa con $\frac{6}{8}=\frac{3}{4}$. La de 5 as y as se divide en 7 partes iguales, 5 son de salitre, 1 de azufre, 1 de carbón, se explica con $\frac{5}{7}$. La de 4 as y as se divide en 6 partes iguales, 4 de salitre, 1 de azufre, 1 de carbón, la señala el quebrado $\frac{4}{6}=\frac{2}{3}$. Luego estas tres layas de pólvora son entre sí como los tres quebrados, $\frac{3}{4}$; $\frac{5}{7}$; $\frac{2}{3}$, ó reduciéndolos á una misma denominacion como $\frac{63}{84}$, $\frac{60}{84}$, $\frac{56}{84}$, esto es, como los numeradores 63; 60; 56; de donde se ve que la de 5 as y as 60, no es média arithmética entre las otras dos 63; 56.

La diferéncia entre las pólvoras extremas 63

y 56 es 7 ; y las diferéncias etre cada extrema y la que se pide son 3 y 4 , lo que indica , que el excesso de la fuerte es menór que el defecto de la feble, en razón de 3 á 4 ; luego se ha de coger mas veces excesso menór para compensar menos veces defecto mayór en razón recíproca, ó como 4 á 3; esto es, que se han de coger 4 libras de pólvora de á 63 por 3 libras de la de á 56, para componer 7 libras de á 60, y con efecto $4 . 63 + 3 . 56 = 7 . 60$ por ser un theorema ó proposicion general , que se puede expresar del modo siguiente.

Si la diferéncia entre dos números qualesquiera se divide en dos qualesquiera partes, y que estas partes ú otros qualesquiera números , que tengan la misma razón , multipliquen los dos primeros números , los dos mayores entre sí , y los dos menores entre sí , la suma de los productos es igual al producto de la suma de los segundos números (partes ó en razon de partes) por un número que es, ó bien la suma del primér número menór y del segundo número mayór , ó bien la diferéncia del primer número mayór y del segundo número menór.

Demos la *demonstracion* aplicándola á los números del caso presente , que satisfacen á las leyes de la proposicion, la que escribiremos de un modo algo distinto.

. . . . $4 \cdot \overline{60+3} + 3 \cdot \overline{60-4} = \overline{4+3} \cdot 60$

El primér prod. es $4 \cdot 60 + 4 \cdot 3$

El segundo . . . $3 \cdot 60 - 4 \cdot 3$

Se destruyen los dos productos $+4 \cdot 3$; $-4 \cdot 3$ y solo quedan $4 \cdot 60 + 3 \cdot 60$ para la suma, los mismos que quedan del otro lado del signo de igualdad $\overline{4+3} \cdot 60$ esto es, $7 \cdot 60$.

Acábese el exemplo, y se verá que 4 libras de á 63 ($=\frac{252}{84}$) con 3 libras de á 56 ($\frac{168}{84}$) hacen 7 libras, que valen $\frac{420}{84}$, lo mismo que 7 libras de á 60. Luego ya que se piden 300 libras de pólvora de 5 as y as, que á $\frac{60}{84}$ por la expresion de cada libra, se expresarán por $\frac{18000}{84}$, se han de buscar dos números, que indiquen quantas libras se han de coger de cada una de las pólvoras que hai, y con lás condicíones,

1ª. que su suma sea 300.

2ª. que sea el uno al otro como 4 á 3.

De las dos primeras sigue necesariamente la tercera condicion.

3ª. que la suma de los productos del mayór por 63 y y del menór por 56 sea 18000.

Las dos primeras indican por regla; la diferéncia total 7 es á una diferéncia particular 4, como la suma total 300. es á una suma particular, que saldrá de $171\frac{3}{7}$.

La otra suma particular, sacada por otra regla semejante ó por simple substraccion, será $128\frac{4}{7}$: ambas harán 300, y están entre sí como 4 y 3.

Sus

Sus productos por 63 y 56 respective, forman una suma de 18000, producto de 300 . 60, por lo demonstrado; luego se satisface enteramente á la question.

Si se pide el précio de la libra de 5 as y as formada assí; sabiendo los precios de las que sirvieron á componerla, será muy facil determinarlo. Se sumará el valór de las $171\frac{3}{7}$ libras de 6 as y as, con el valór de las $128\frac{4}{7}$ de 4 as y as, y se partirá la suma por 300, el quociente dará el précio de cada libra de 5 as y as.

Exemplo segundo: Este de mas de dos cosas que ligar será el mismo propuesto antes p. 124 Se ha de hacer una obra de 100 marcos de plata de á 140 reales de vellon el marco, con barras de plata de distinta ley, ú de diferente valór el marco: v.g. de 130; 137; 144; 160 reales de vellon. Se pregunta quanto metal se ha de cortar de cada una?

Se juntarán las leyes distintas de dos en dos, una menór y otra mayór que la ley de la mezcla, por ser claro que de dos menores ú de dos mayores no se puede hacer una mezcla média, sino siempre una menór ó mayór que la que se quiere; se tomará la diferéncia de cada ley á la propuesta, la suma de essas diferéncias será una mezcla con las condiciones que se imponen, compuesta de las porciones de cada léy que expressan, tomadas reciprocamente de cada barra: de suerte, que 37 marcos de mezcla de á 140 reales el marco se harán con 10 marcos de la plata de 144 de ley; 4 marcos de la de 130; 3 marcos de la de 160; y 20 marcos de la de 137

de ley.

130 diferéncia } 10
×
144 diferéncia } 4
} á 140
137 diferéncia } 3
×
160 diferéncia } 20

37 Suma.

La prueba es que 10 m. á 144 rs. montan á 1440 rs.

4 á . . . 130 520
2 á . . . 160 480
20 á . . . 137 2740

Suma. . . 5180

Y que 37 marcos de plata á 140 reales montan lo mismo.

Luego con tantas reglas de tres como cosas hai que mezclar, se resolverá del todo la question; pues si 37 marcos de la mezcla piden 10 de la plata de á 144 reales de ley, 100 marcos quantas pedirán? Y assí se harán las reglas siguientes.

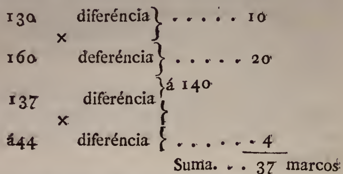
37 : 10 = 100 : $27\frac{1}{37}$ de á 144 rs. que imp. $3891\frac{33}{37}$ rs.
37 : 4 = 100 : $10\frac{30}{37}$ de á 130 . . . . . . $1405\frac{15}{37}$
37 : 3 = 100 : $8\frac{4}{37}$ de á 160 . . . . . . $1297\frac{11}{37}$
37 : 20 = 100 : $54\frac{2}{37}$ de á 137 . . . . . . $7405\frac{15}{37}$

100 marcos. 14000

Esto es, 144 reales el márco, como lo pide la question.

Se

Se puede reparar otra solucion que vendrá, si se juntan de otro modo las diferentes leyes de la plata.



de plata de á 140, que se harán con - - - - - - - -

10 de la de 160 reales
20. 130
3. 137
4. 144

Luego los 100 marcos se compondrán - - - - - - -

con $27\frac{1}{37}$ marc. de ley á	160 rs. que mont.	$4324\frac{12}{37}$ rs.
$54\frac{2}{37}$ de á	130	$7027\frac{1}{37}$
$8\frac{4}{37}$ de á	144	$1167\frac{21}{37}$
$10\frac{30}{37}$ de á	137	$1481\frac{3}{37}$
100 marcos, que importan		14000 rs.

á 140 el marco.

Quando las cosas de diferente valór, de que se ha de componer el mixto, se dan en número impar como 3, 5, &c., se juntan siempre de dos en dos, valiéndose dos veces de una de ellas.

Con estos exemplos de los dos objetos de la re-

regla de aligacion, que he procurado poner con claridad, se debe entender en que consiste, y como se ha de aplicar á la resolucion de las questiones de la misma naturaleza; á querer entrar en consideracion de todos sus casos y combinaciones, se necesitara un discurso muy largo, tedioso, y de poca importancia.

La demonstracion de essas quatro reglas, supuesta la de las proporciones en general, está contenida en el mismo discurso que se han hecho para su práctica.

DE LOS LOGARITHMOS.

SI dada una progression geométrica qualquiera, se escribe debaxo de ella una progresion arithmética qualquiera, él primér término de la una debaxo del primér término de la otra; el segundo debaxo del segundo, &c. Los de la progression arithmética serán los Logarithmos de los de la progression geométrica, cada término de aquel que le corresponde.

Se pueden escoger qualesquiera dos progressiones á esse fin; pero atendiendo á la suma utilidad de esta invencion, y para aprovecharse de ella en la arithmética vulgar, se ha escogido la progression geométrica décupla que empieza por la unidad, y para la progression arithmética, la série llana de los números naturales, que empieza por cero.

Progression geométrica.

$\div\!\div$ 1 : 10 : 100 : 1000 : 10000 : 100000 : 1000000 : &c.

$\div$ 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, &c,

Progression arithmética.

Dispuestas assí las dos progresiones, se reparará luego, que los términos de la arithmetica, los Logarithmos, son los exponentes de los términos de la geométrica de que son logarithmos; pues sabido ya, que $10^0 = 1$, la progression geométrica, formada con las poténcias de 10, se puede escribir en estotra forma con solos los exponentes - - - - $\div 10^0 : 10^1 : 10^2 : 10^3 : 10^4 : 10^5 : 10^6 :$ &c, y los exponentes puestos debaxo, harán la progression arithmética de los números naturales, que empieza por 0; luego indicarán quantas veces el primér termino de la progression geométrica habrá sido multiplicado por el exponente de la progression, para formar el término correspondiente de cada logarithmo: el número 3 indicará que el primér término 1 ha sido multiplicado tres veces por 10 para formar 1000, que corresponde al logarithmo 3. Se reparará tambien que si se escogen en la progression geométrica 4 términos, que formen una proporcion geométrica, sus logarithmos formarán una proporcion arithmética por lo que ya se ha dicho.

Pero volviendo á la primera expression de las dos progressiones, tendremos para los números naturales en progression décupla desde 1, los logarithmos en progression arithmética de las unidades desde 0; y (lo que pide particula atencion) cada logarithmo, será de tantas unidades, menos una, quatas notas ó cifras hubiere en el numero del qual es logarithmo. 10 tiene dos cifras, su logarithmo

mo tiene dos unidades menos una. 100 es de tres cifras, su logarithmo tiene tres unidades menos una, y lo mismo en todos. Y assí.

Para los números	Logarithmos
1	0
10	1
100	2
1000	3
10000	4
100000	5
1000000	6
10000000	7
100000000	8
1000000000	9
10000000000	10

A la verdad, como distan los números entre sí de un intervalo grande, qae aún va creciendo mas y mas, serán muy pocos, y quasi inutiles los logarithmos de esta clase, si no se hallan los de los demás números naturales que están entre los términos de la progression geométrica. Entre 1 y 10 hai 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, sus logarithmos estarán entre 0 y 1; de 10 á 100 van 11, 12, 13, &c, sus logarithmos se hallarán entre 1 y 2; y assí de los demas números. El méthodo de formarlos es muy facil, pero la operacion es dilatada.

Se busca un médio proporcional ettre dos términos immediatos de la progression geométrica, y otro entre los dos còrrespondientes de la progression arithmética, este será siempre el logarithmo de aquel; se busca otro médio proporcional en una y otra progression entre el ultimo hallado, y aquel

aquel delos términos hacia el qual se inclina el número cuyo logarithmo se desea, y teniendo dos ó mas médios proporcionales, se busca siempre uno nuevo entre los dos términos ó médios ya hallados, que conprenden entre sí el número que es el motivo del cálculo: claro está, que á fuerza de hallar médios proporcionales geométricos, se encontrará por fin uno que sea el número deseado, exactamente no, por no ser quadrados perfectos los productos de los extremos de la proporcion: pero si con la aproximacion que se quisiere, y solo con una diferéncia en mas ó en menos, despreciable por su pequeñez Hecho lo mismo en la progression arithmética, y hallados los médios proporcionales arithméticos, se tendrán los logarithmos de aquellos médios proporcionales geométricos, y por consiguiente el logarithmo del número que se busca.

Para estas operaciones se añaden partes decimales al uno y al otro término de ambas progressiones, y con ellas se alcanza la precision que se quiere; pónese un punto entre el verdadero término y sus decimales, y en el logarithmo lo ue está á la izquierda del punto, lo que es el logarithmo primitivo, se llama la *charaEteristica* del logarithmo total, ú del logarithmo primitivo y de las partes decimales que le han cabido. Esta es de mucho uso, assí para los compéndios en el cálculo, como para hallar los logarithmos de los quebrados por un méthodo que se indicará.

De essa suerte en lugar de los términos de ambas progressiones,

Números	logarithmos
1	0
10	1

Tendremos estos

A.	1.0000000	0.0000000
B.	10.0000000	1.0000000

Muchos mas ceros ó partes decimales añadíeron Los que se dedicaron á hallar los logarithmos de los números naturales desde 1 hasta cien mil, de pue tenemos Tablas impresas; pero los que suponemos bastan, assí para la inteligencia del méthodo, como para el uso en la mayór parte de los cálculos, y para el exemplo que pondremos aquí, que se halla tambien en otros libros de arithmética.

Conocidos los logarithmos de 1 y de 10, como én *A* y *B*, se pide el logarithmo del número 3.

El

El medio prporc. geomét. El médio prop. arithmet.

Nùmeros naturales.			*Logarithmos.*
Etre	*A* y *B* es *a*	31622777	0.5000000
	A y *a* es *b*	17782794	0.2500000
	a y *b* es *c*	23713737	0.3750000
	a y *c* es *d*	27384196	0.4375000
	a y *d* es *e*	29427272	0.4687500
	a y *e* es *f*	30505279	0.4843750
	e y *f* es *g*	29964128	0.4765625
	f y *g* es *h*	30232130	0.4804687
	g y *h* es *i*	30096474	0.4785156
	g y *i* es *k*	30028875	0.4775391
	g y *k* es *l*	29995132	0.4770508
	k y *l* es *m*	30011999	0.4772949
	l y *m* es *n*	30003564	0.4771729
	l y *n* es *o*	29999348	0.4771118
	n y *o* es *p*	30001456	0.4771423
	o y *p* es *q*	30000402	0.4771271
	o y *q* es *r*	29999869	0.4771194
	q y *r* es *s*	30000132	0.4771233
	s y *s* es *t*	30000000	0.3771213

Con 19 operaçiones se halla el logarithmo del múmero 3, y assi se hallarán con mas ó menos operaciones, los logarithmos de los demas números naturales; trabajo immenso, pero ya hecho. Es verdad que en la práctica admite muchos compéndios, que se indicarán luego; sin embargo, si se considera que para el logatithmo de 9 por el me-

thodo directo, y solo con 7 ceros añadidos, se necesitan 52 médios proporcionales, la mitad geométricos, y la otra mitad arithméticos, cada uno de aquellos con una multiplicacion de dos números; (aquí de 8 cifras, pero en el trabajo formal que se ha hecho de las Tablas, de 15 cifras, aunque en algunas solo de 10, lo que aumenta el número de los médios proporcionales) y una extraccion de la raíz del producto; y cada uno de estos con una adicion de dos números de á 8, 10, ó 15 cifras, y una biparticion de la suma; que cada operacion antes de quedar acertada se debe hacer quando menos, dos veces; que esto se ha practicado desde 1 hasta cien mil, aunque muchas veces por compéndios; no se dexará de admirar la paciéncia de *dos ó tres* Hombres, que se impusieron este cargo en beneficio de las ciéncias mathématicas, y le añadieron otro mayór en formar nuevas Tablas de logarithmos de otros números igualmente útiles para las mismas ciéncias, y que se manifestarán en otro Tratado.

La propriedad de los logarithmos es mudar la multiplicacion de números en una mera adicion, y la particion en una mera substraccion, usando de ellos en lugar de los números naturales de que son logarithmos; y siendo o el logarithmo de la unidad, la suma de los logarithmos de dos (ó mas) factores, será el logarithmo del producto; la diferéncia entre los logarithmos del dividendo y del divisor será el logarithmo quociente.

En la multiplicacion la unidad es á uno de los

los factores , como el otro factór es al producto ; los logarithmos de estos 4 términos formarán una proporcion arithmética , en que la suma de los extremos es igual á la suma de los médios , pero siendo o , logarithmo de la unidad , uno de los extremos , quedará la suma de los médios igual al otro extremo , esto es la suma de los dos logarithmos de los médios geométricos , igual al logarithmo del producto de ellos.

En la division , es la unidad al partidór , como quociente al dividendo ; los logarithmos de estos 4 términos formarán tambien una proporcion arithmética ; luego la suma de los logarithmos del partidór y del quociente será igual á la suma de los logarithmos de la unidad y del dividendo ; esto es , al logarithmo del dividendo (siendo o él de la unidad) ; por consiguiente si del logarithmo de dividendo se resta él del divisór , quedará él del quociente.

Síguese de esta propriedad lo primero , que para levantar un número dado á una potestad dada , basta añadir á sí mismo el logarithmo del número dado , tantas veces , quantas unidades tiene el exponente dado , esto es , multiplicar el logarithmo por el exponente , y el producto será el logarithmo de la potestad pedida del número dado.

Lo segundo , que para sacar la raiz qualquiera de un número dado , basta tomar del logarithmo del número dado una parte aliquota del mismo exponente que la raiz. ; si es la raiz quadrada , cuyo exponente es 2 , se tomará la mitad del logarithmo

mo. Si es la raíz cúbica, cuyo exponente es 3, se tomará la tercera parte del logarithmo. En general se partirá por el exponente, y el quociente será el logarithmo de la raíz que se pide.

Ya se pueden entender los compéndios que se han empleado en la construccion de las Tablas de logarithmos desde 1 hasta cien mil, y algunos que se usan en los cálculos, que se hacen por por médio de ellas.

Conocido el logarithmo de un número, se conocen los de todas sus potestades y raízes, con solo multiplicarle por 2. por 3. por 4, &c, ó partirle por 2, por 3, por 4, &c: Con el logaritmo de 3, que hemos hallado tendremos duplicándolo él de 9, triplicandolo él de 27 &c.

Tambíen se conocen los logarithmos de los números décuplos ó subdécuplos en la forma actual, ó en la progression décupla que se ha escogido; basta para esto aumentar ó disminuir de una ó mas unidades la characterística.

Dados los logarithmos de dos números, se da el logarithmo del producto de ellos, y él del quociente del uno partido por el otro.

En general lo preciso en la construccion de las Tablas fué el hallar con cálculo riguroso, los logarithmos de los números primos en sí, que no tienen mas parte aliquota que la unidad; todos los demás formados por la multiplicacion de algunos factores se encontraron con la adicion de los logarithmos de sus factores.

Hallados los logarithmos de los números natu-

turales desde 1, hasta el número que se propusieron los primeros Autores, los que han seguido, han variado algo en el méthodo de coordinar las Tablas que han publicado; en esto se debe atender á la mayór facilidad en el uso, y al grado de precision que piden y permiten las operaciones, á que se deben aplicar.

Las que damos en este Compéndio van desde 1 hasta 3600; primeramente de 10 en 10, cada decena debaxo una de otra y á la izquierda; luego de uno en uno en el mísmo renglón, con las unidades señaladas arriba; y como se nos han de ofrecer reglas de proporcion entre partes *sexagésimas*, ú de grados y minutos, horas y minutos, minutos y segundos; partes llamadas assì porque 1 de la espécie mayór vale 60 de la especie menór immediata; para evitar la reduccion, hemos añadido una entrada en essas sexagéssimas; la que hemos puesto á la derecha con sus decenas en alto y sus unidades en lo ancho, las mismas que las de los números naturales, v.g. si se quiere el logarithmo de $5^{h}\ 17^{I}$ ú de $5^{o}\ 17^{I}$ ú de $5^{I}\ 17^{II}$, que hacen 317^{I}. ú 317^{II}, se escusará essa reduccion de grados ú horas ó minutos, en minutos ó en segundos; se buscará en frente de 5 . 10. y en la coluna 7 el logarithmo que le conviene: llega esta Tabla hasta 60 grados ú horas.

Hemos sacado estos logarithmos de las Tablas grandes de *Briggs*, y de 8 cifras; y porque la characterística ha de ser siempre de tantas unidades

me-

menos una, quantas cifras hai en el número natural, cuyo logarithmo se desea; hemos supuesto la charaćterística, que se suplirá siempre, y assí no hai dificultad en sacar los logarithmos de los números de 1 hasta 3600.

Con esta disposicion de una Tabla de logarithmos, se logra el aumentarla sin aumentar el volumen, lo que es de alguna consideracion en el uso: es sin duda la forma que se debe preferir entre muchas que se han imaginado. Con ella y la suposicion de la charaćterística, se ha logrado añadir las partes sexagésimas. y poner 3600 logarithmos, donde con la disposicion común solo hubieran cabido 2430 sin sexagésimas.

Para hallar los logarithmos de los números mayores que 3600 hasta 36000, se hará lo que enseña el exemplo siguiente. Pídese el logarithmo de 28476. En la Tabla el logarithmo de 2847, con la charaćterística 3 que le compete por tener 4 cifras es 34543875; luego el de . . . 28470 será 44543875
De la misma suerte el logar. de 28480 será 44545400

La diferència 1525

Es por 10 desde 28470 harta 28480; y estando el número 28476 entre uno y otro, se ha de tomar de essa diferéncia que es por 10, lo que comviniere á 6, y añadirlo al logarithmo de 28470, para tener el de 28476.

Si la diferéncia 1525 es por 10, partiéndola por 10 dará $152\frac{1}{2}$ por 1, luego por 6 dará 915, que añá-

añadidos al logarithmo menór formarán el logarithmo de 28476, que será 44544790.

Pídese el logarithmo de 23002; se tomarán él de 23000, que es . . 42617278
y él de 23010, que es . 43619166

Su diferéncia	1888	por	10 da
	189	por	1
	378	por	2.

Que añadidos al menór logarithmo dan 43617656 por el logarithmo de 28002.

Si fuere el logarithmo que se pide mas immediato al mayór de la Tabla. v.g. del número 3613, con los de 361 y de 362, se tendrán los

logarithmos de 3610 35575072
y de 3620 35587086

diferéncia por 10 12014
deferéncia por 3 3604

que añadida al logarithmo de 3610 da él de - - -
3613 ———————— 35578676

Estos logarithmos salen con tanta mas exactitud quanto mayores son sus números narurales, ó quanto mas distan estos de 3600, número mayór de la Tabla. De los tres que hemos hallado, los dos primeros son los mismos que en las Tablas grandes, el último es menór que el verdadero de 4 unidades; la razón es, que en los logarithmos, las diferéncias, que van siempre disminuyendo, son desiguales, aún en los immediatos; y mas desiguales en los núme-

ros menores que en los mayores; y partiendose igualmente la de 10, para hallar la que conviene á 1, á 2, á 3, &c, por lo regular se tiene hasta 5 algo menos de lo justo, y desde 5 hasta 10 algo mas; por exemplo, la diferéncia 12014, que acabamos de hallar, no se debia partir igualmente ni dar por uno,

1.	1201 pero desig. en	1203 que dan	1203	por 1
2.	2403	1203	2406	. . 2
3.	3604	1202	3608	. . 3
4.	4806	1202	4810	. . 4
5.	7007	1201	6011	. . 5
6.	7208	1201	7212	. . 6
7.	8410	1201	8413	. . 7
8.	9611	1201	9614	. . 8
9.	10813	1200	10814	. . 9
10.	12014	1200	12014	. 10

Entonces la diferencia por 3 era 4608, y el logarithmo de 3613 venia de 35578680, el mismo que en las Tablas grandes.

El logarithmo de otro qualquiér número mucho mayór que 36000 se puede formar por partes, hallando dos ó mas factores de aquel número, y sumando los logarithmos de estos factores. En general él principal uso de las Tablas se reduce á los puntos siguientes.

Los números ó se hallan en la Tabla ó nó, son enteros, ó enteros con quebrado, ó quebrados sin entero; los primeros casos están ya vistos, faltan

tan los quebrados, ó juntos con los enteros ó solos de por sí. Ya-que se halla la diferéncia por 1, se hallará lo que conviene á qualquier quebrado, que acompañe á un número entero, partiendo essa diferéncia por el denominador del quebrado, multiplicando el quociente por el numerador, y sumando el producto con el logarithmo del entero.

El logarithmo de $2413\frac{5}{7}$ se hallará ser 33826859 despues de haber partido la diferéncia . . . . 1800 (entre los logarithmos de 2413 y 2414) por 7, multiplicando el quociente $257\frac{1}{7}$ por 5, y sumado el producto 1286 con el logarithmo de 2413, porque se debe hacer esta proporcion, $1 . 1800 = \frac{5}{7} . N$. Luego se ha de multiplicar la diferéncia por el quebrado, y partir el producto por el primér término, que siendo 1 hace inútil la particion; bastará pues multiplicar 1800 por $\frac{5}{7}$, y el producto será $\frac{9000}{7} = N$; pero se ha de reducir partiendo 9000 por 7, lo que do $1286 = N$: es mas facil partir primero por 7, y multiplicar el quociente por 5.

Si el quebrado fuere en decimales, vale la misma regla; pero hai otra forma de cálculo legítimo de los decimales, que se practica con solo aumentar ó disminuir la characterística, segun las operaciones que se han de hacer: Si se pide el logarithmo de 27.34. se buscará él del número entero 2734; que se hallará ser 34367985; y disminuyendo la characterística de dos unidades, por haber dos decimales en el número dado, quedará 14367985 por el logarithmo de

de 27 . 34, que es $27\frac{34}{100}$. Este méthodo es el mas seguro, particularmente en los números cortos, por motivo de la desigualdad ya advertida de sus diferéncias, y es aún regla general entre los que usan de logarithmos para calculos de mucha exactitud el suponer la characterística mayór de 1, de 2, de 3 unidades (conforme lo permite la extencion de la Tabla) y buscando el número que le toca, quitarle otras tantas cifras de la derecha, que se hacen decimales; pero no necesitamos aquí de tanta precision.

En fin ofreciéndose un quebrado sin enteros, pero verdadero quebrado, esto es, menor que la unidad, es evidente que su logarithmo debe ser menór que 0, logarithmo de la unidad; luego es una cantidad negativa; Tómese la diferéncia entre los logarithmos del numerador y del denominador, y afectese con el signo *menos*, será el logarithmo del quebrado verdadero.

El logarithmo de $\frac{5}{7}$ es—0146128o, diferéncia entre los logarithmos de 7 y de 5, y negativa; y porque un quebrado indica una particion del numerador por el denominador, y que en la particion se resta el logarithmo del partidor, del logarithmo del dividendo para tener el logarithmo del quociente, podrá parecer este méthodo directamente opuesto al verdadero; pero los dos son en realidad uno y el mismo; y si fuesse quebrado mayor que la unidad, esto es, el numerador mayor que el denominador, re restará como en la particion el logarithmo de este del logarithmo de aquel, y el sesíduo será positivo. Si se dan $\frac{7}{5}$, bien se ve, que siendo

lo

lo mismo que $1\frac{2}{7}$, su logarithmo es de alguna cantidad positiva entre o y 1.

De suerte que la expression de ambos logarithmos de $\frac{5}{7}$ y de $\frac{7}{5}$, es la misma en quanto á cifras, siendo una y otra la diferéncia entre los logarithmos de 7 y de 5 ; pero la una cantidad es negativa, y la otra es positiva, ó por ser la una nenór que o, y la otra mayór que o, logarithmos de la unidad.

Si dexa alguna dificultad esta explicacion, se puede tener la regla general, que se ha de restár siempre el logarithmo del denominador del logarithmo del numerador, con la advertencia (tambien regla general) que quando la cantidad que se resta es mayor que la de la qual se resta, el resíduo es siempre la diferéncia de ambas negativa, ó afectada con el signo menos. Si de 14 se restan 20 quedan—6.

Con esto se podran efectuar todas las operaciones sobre los quebrados, como si fueran números enteros, no solo el sumar y multiplicar, el restar y partir, sino tambien el formar potestades, y extraher raízes de la misma suerte y con la misma conveniéncia que ofrecen los logarithmos para los números enteros.

Por los mismos méthodos inversos se asignará en las Tablas el número que pertenece á qualquier logarithmo dado; la charactéristica indicará de quantas cifras ha de ser ; si se halla el logarithmo exactamente en las Tablas, el número natural correspondiente será él que se busca ; sino se halla exactamente, se tomará la diferéncia entre los dos logarithmos próximos, menor y mayor, y luego la del

pró-

próximo menor al logarithmo dado; y haciendo mentalmente la regla de proporcion, si la diferéncia entre los logarithmos mayor y menor da 1 de diferéncia en el número natural, quanto dará la diferéncia del menor al logarithmo dado; se hallará un quebrado que añadir al número correspondiente del logarithmo menor, y será el quebrado de la denominacion que se quisiere. v.g. se exprerará en tércios, en quartos, en décimos, en céntecimos &c, con solo suponer 3, 4, 10, 100 en lugar de 1 por segundo término de la proporcion.

Por exemplo, viene en un cálculo el logarithmo 33871597, y se pide el número que indica; por ser la charaćterística 3, tendrá el número 4 cifras, y buscando en la Tabla de logarithmos se halla el próximo menor 33870337, logarithmo de 2438, y el próximo mayor 33872118, logarithmo de 2439. La diferéncia es 1781, y la diferéncia entre el menor y el logarithmo dado es 1260, y se quiere el quebrado en dozavos; luego 1781 : 12 = 1260 : *N* que se hallará $\frac{8\frac{1}{2}}{12}$ y será el número que se busca 2438 $\frac{8\frac{1}{2}}{12}$

Pero no se halla el logarithmo en la Tabla por ser de un número mayor que el mayor de ella, es 41453960, y con la charaćterística 4 ha de tener 5 cifras; se busca por la charaćterística 3, y se encuentra el próximo menor 31451964, y el proximo mayor 31455072, logarithmos de 1397, y 1398

lue-

luego el verdadero nùmero del logarithmo dado esta entre 13970 Á ' 13980; la diferéncia entre los logarithmos mayor y menor es 3108, y la del menor al logarithmo dado es 1996; se dirá si 3108 dan 10, que darán 1996? Darán $6\frac{42}{100}$, que añadidos á 13970, formarán el número natural correspondiente al logar. dado $13976\frac{42}{100}$.

Se da el logarithmo negativo—19084850, y se pide la cantidad á que corresponde (que es un quebrado.) Lo busco en la Tablà como si fuera positivo; y veo que da el número 81; luego el quebrado es $\frac{1}{81}$.

Este mismo logarithmo negativo, puede indicar otro quebrado de otra qualquiera denominacion; lo primero, porque se puede transformar ó reducir $\frac{1}{81}$ á otra denomínacion; lo segundo, porque el logarithmo dado 19084850 puede ser la diferéncia entre dos logarithmos de dos números, que no sean 81 y 1. Se han de expresar, v.g. el quebrado en 720 avos; si es así, el logarithmo dado es la diferéncia entre el logarithmo de 720, y otro de otro nùmero: luego restando el logarithmo dado del logarithmo 720, que se halla ser 28573325, quedarán 09488475. logarithmo de $8\frac{9}{10}$, y será el quebrado $\frac{8\frac{9}{10}}{720}$, ó con corta diferéneia $\frac{9}{720}$ el que corresponde al logarithmo negativo que se propuso.

LOGARITHMOS

DE LOS NUMEROS NATURALES

desde 1 hasa 3600,

y de la Sexag esim as hasta 60 grados ó horas, &c. de minuto en minnto sin reduccion.

Los logarithmos de los diez primeros números se han puesto á parte con su característica y sus diferéncias, para las partes proporcionales, si se ofrecen, en diferéncias tan crecidas.

Num. nat.	*Logarithmos de los 10 prim. num. nat. y sus diferenc.*		*Part. Sexag.*
	Logarithmos.	*Diferencias.*	
1	00000000		0. 1
2	03010300	3010300	2
3	04771212	1760913	3
4	06020600	1249387	4
5	06989700	969100	5
6	07781513	791813	6
7	08450980	669467	7
8	09030900	579920	8
9	09542425	511525	9
10	10000000	457575	10

Logarithmos de los Números naturales , y de las

Num.	0	1	2	3	4
10	0000000	0413927	0791812	1139434	1461280
20	3010300	3222193	3424227	3617278	3802112
30	4771213	4913617	5051500	5185139	5314879
40	6020600	6127839	6232493	6334685	6438527
50	6989700	7075702	7160033	7242752	7393938
60	7781513	7853298	7923917	7993405	8061800
70	8450980	8512583	8573325	8633229	8692317
80	9030900	9084850	9138139	9190781	9242793
90	9542425	9590414	9637878	9684829	9731279
100	0000000	0043214	0086002	0128372	0170333
110	0413927	0453230	0492180	0530784	0569049
120	0791812	0827854	0863598	0899051	0934217
130	1139434	1172813	1205739	1238516	1271048
140	1461280	1492191	1522883	1553360	1583625
150	1760913	1789769	1818436	1846914	1875207
160	2041200	2068259	2095150	2121876	2148438
170	2304489	2329961	2355284	2380461	2405492
180	2552725	2576786	2600714	2624511	2648178
190	2787536	2810334	2833012	2855573	2878017
200	3010300	3031961	3053514	3074960	3096302
210	3222193	3242825	3263359	3283796	3304138
220	3424227	3443923	3463530	3483049	3502480
230	3617278	3636120	3654880	3673859	3692159
240	3002112	3820170	3838154	3856063	3873898

partes sexagesimas.	*La Caracteristica supuesta.*				
5	6	7	8	9	*Sex.*
1760913	2041200	2304489	2552725	2787536	0. 10
3979400	4149733	4313638	4471580	4623980	20
5440680	5563025	5682017	5797836	5910646	30
6532125	6627578	6720979	6812412	6901961	40
7403627	7481880	7558749	7634280	7708520	50
8129134	8195439	8260748	8325089	8388491	2. 0
8750613	8808136	8864907	8920946	8976271	10
9294189	9344984	9395593	9444827	9493900	20
9777236	9822712	9867717	9912261	9956352	30
0211893	2053059	0293838	0334238	0374265	40
0606078	0644580	0681859	0718820	0755470	50
0969100	1003705	1038037	1072100	1105897	1. 0
1303338	1335389	1367206	1398791	1430148	10
1613680	1643529	1673173	1702617	1731863	20
1903317	1931246	1958997	1986571	2013971	30
2174839	2201081	2227165	2253093	2278867	40
2430380	2455127	2479733	2504200	2528530	50
2671717	2695129	2718416	2741578	2764618	8. 0
2900346	2922561	2944662	2966652	2988531	10
3117539	3138672	3159703	3180633	3201463	20
3324385	3344538	3364597	3384565	3404441	30
3521825	3541084	3560259	3579348	3598355	40
3710679	3729120	3747483	3765769	3783979	50
3891661	3909351	3926970	3944517	3961993	4. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
250	3979400	3996737	4014005	4031205	4048337
250	4149733	4166405	4183013	4199557	4216039
270	4313638	4329693	4345689	4361626	4377506
280	4471580	4487063	4502491	4517864	4533183
290	4623980	4638930	4653829	4668676	4683473
300	4771213	4785665	4800069	4814426	4828736
310	4913617	4927604	4941546	4955443	4969296
320	5051500	5065050	5078559	5092025	5105450
330	5185139	5198280	5211381	5224442	5237465
340	5314789	5327544	5340261	5352941	5365584
350	5440680	5453071	5465427	5477747	5490033
360	5563025	5575072	5587086	5599066	5611014
370	5682017	5693739	5705429	5717088	5728716
380	5797836	5809250	5820634	5831988	5843312
390	5910646	5921768	5932861	5943926	5954962
400	6020600	6031444	6042261	6053050	6063814
410	6127839	6138418	6148972	6159501	6170003
420	6232821	6242821	6253125	6263404	6273659
430	6334685	6344773	6354837	6364879	6374897
440	6434527	6444386	6454223	6464037	6473830
450	6532125	6541765	6551384	6560982	6570559
460	6627578	6637009	6646420	6655810	6665180
470	6720979	6730209	6739420	6748611	6757783
480	6812412	6821451	6830470	6839471	6848454

partes sexagesimas. Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	Sex.
4065402	4082400	4099331	4116197	4132998	10
4232459	4248816	4265113	4281348	4297523	20
4393327	4409091	4424798	4440448	4456042	30
4548449	4563660	4578819	4593925	4608978	40
4698220	4712917	4727564	4742164	4756712	50
4842998	4857214	4871384	4885507	4899585	5. 0
4983106	4996871	5010593	5024271	5037907	5. 10
5118834	5132176	5145478	5158738	5171959	20
5250448	5263393	5276299	5289167	5301997	30
5378191	5390761	5403295	5415792	5428254	40
5502284	5514500	5526682	5583830	5550944	50
5622929	5634811	5646661	5658478	5670263	6. 0
5740313	5751878	5763414	5774918	5786392	10
5854607	5865873	5877110	5888317	5899496	20
5965971	5976952	5987905	5998831	6009729	30
6074550	6085260	6095944	6106602	6117233	40
6180481	6190933	6201361	6211763	6222140	50
6283889	6294096	6304279	6314438	6324573	7. 0
6384893	6394865	6404814	6414741	6424645	10
6483600	6493349	6503075	6512780	6522463	20
6580114	6589648	6599162	6608655	6618127	30
6674530	6683859	6693169	6702459	6711728	40
6766936	6776070	6785184	6794279	6803355	50
6857417	6866363	6875290	6884198	6893089	8. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
490	6901961	6910815	6919651	6928469	6937269
500	6989700	6998377	7007037	7015680	7024305
510	7075702	7084209	7092700	7101174	7109631
520	7160033	7168377	7176705	7185017	7193313
530	7242759	7250945	7259116	7267272	7275413
540	7323938	7331973	7339993	7347998	7355989
550	7403627	7411516	7419391	7427251	7435098
560	7481880	7489629	7497363	7505084	7512791
570	7558749	7566361	7573960	7581546	7589119
580	7634280	7641761	7649230	7656686	7664128
590	7708520	7715875	7723217	7730547	7737864
600	7781513	7788745	7795965	7803173	7810369
610	7853298	7860412	7867514	7874605	7881684
620	7923917	7930916	7937904	7944880	7951846
630	7993405	8000294	8007171	8014037	8020893
640	8061800	8068580	8075350	8082110	8088859
650	8129134	8135810	8142476	8149132	8155777
660	8195439	8202015	8208580	8215135	8221681
670	8260748	8267225	8273693	8280151	8286599
680	8325089	8331471	8337844	8344207	8350561
690	8388491	8394780	8401061	8407332	8743595
700	8450980	8457180	8463371	8469553	8475727
710	8512583	8518696	8524800	8530895	8536982
720	8573325	8579353	8585372	8591383	8597386

partes sexagesimas. Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
6946052	6954817	6963564	6972293	6981005	10
7032914	7041505	7050080	7058637	7067178	20
7118072	7126497	7134905	7143298	7151674	30
7201593	7209857	7218106	7226339	7234557	40
7283538	7291648	7299743	7307823	7315888	50
7363965	7371926	7379873	7387806	7395723	9. 0
7442930	7450748	7458552	7466342	7474118	10
7520484	7528164	7535831	7543483	7551123	20
7596678	7604225	7611758	7619378	7626786	30
7671559	7678976	7686381	7692773	7701153	40
7745170	7752463	7759743	7767012	7774268	50
7817554	7824726	7831887	7839036	7846173	10. 0
7888751	7895807	7902852	7909885	7916906	10.10
7958800	7965743	7972675	7979596	7986506	20
8027737	8034571	8041394	8048207	8055009	30
8095597	8102325	8109043	8115750	8122447	40
8162413	8169038	8175654	8182259	8188854	50
8228216	8234742	8241258	8247765	8254261	11. 0
8293038	8299467	8305887	8312297	8318698	10
8356906	8363241	8369567	8375884	8382192	20
8419848	8426092	8432328	8438554	8444772	30
8481891	8488047	8494194	8500333	8506462	40
8543060	8549130	8555192	8561244	8567289	50
8603380	8609366	8615344	8621314	8627275	12. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
730	8633229	8639174	8645111	8651040	8656961
740	8692317	8698182	8704039	8709888	8715729
750	8750613	8756399	8762178	8767950	8773713
760	8808136	8813847	8819550	8825245	8830934
770	8864907	8870544	8876173	8881795	8887410
780	8920946	8926510	8932068	8937618	8943161
790	8976271	8981765	8987252	8992732	8998205
800	9030900	9036325	9041744	9047155	9052560
810	9084850	9090209	9095560	9100905	9106244
820	9138139	9143432	9148718	9153998	9159272
830	9190781	9196010	9201233	9206450	9211661
840	9242793	9247960	9253121	9258276	9263424
850	9294189	9299296	9304396	9309490	9314579
860	9344985	9350032	9355073	9360108	9365137
870	9395193	9400182	9405165	9410142	9415114
880	9444827	9449759	9454686	9459607	9464523
890	9493900	9498777	9503649	9508515	9513375
900	9542425	9547248	9552065	9556878	9561684
910	9190414	9595184	9599948	9604708	9609462
920	9637878	9642596	9647309	9652017	9656720
930	9684829	9689497	9694159	9698816	9703469
940	9731279	9735896	9740509	9745117	9749720
950	9777236	9781805	9786369	9790929	9795484
960	9822712	9827234	9831751	9836263	9840770

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
8662873	8668778	8674675	8680564	8686444	10
8721563	8727388	8733206	8739016	8744818	20
8779470	8785218	8790959	8796692	8802418	30
8836614	8842288	8847954	8853512	8859293	40
8893017	8898617	8904210	8909796	8915375	50
8948697	8954225	8959747	8965252	8970770	13. 0
9003671	9009131	9014583	9020029	9025468	10
9057959	9063350	9068735	9074114	9079485	20
9111576	9116902	9122221	9127533	9132839	30
9164539	9169800	9175055	9180303	9185545	40
9216865	9222063	9227255	9232440	9237620	50
9268567	9273704	9278834	9283959	9289077	14. 0
9319661	9324738	9329808	9334873	9339932	10
9370161	9375179	9380191	9385197	9390198	20
9420081	9425041	9429996	9434945	9439889	30
9469433	9474337	9479236	9484130	9489018	40
9518230	9523080	9527924	9532763	9537597	50
9566486	9571282	9576073	9580858	9585639	15. 0
9614211	9618955	9623693	9628427	9633155	15.20
9661417	9666110	9670797	9675480	9680157	20
9708116	9712758	9717396	9722028	9726656	30
9754318	9758911	9763500	9768083	9772662	40
9800034	9804579	9809119	9813655	9818186	50
9845273	9849771	9854265	9858754	9863238	16. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
970	9867717	9872192	9876663	9881128	9885590
980	9912261	9916690	9921115	9925535	9929951
990	9956352	9966737	9965117	9969492	9973864
1000	0000000	0004341	0008677	0013009	0017337
1010	0043214	0047512	0051805	0056094	0060380
1020	0026002	0090257	0094509	0098756	0103000
1030	0128372	0132587	0136797	0141003	0145205
1040	0170333	0174507	0178677	0182843	0137005
1050	0211893	0216027	0220157	0224284	0228406
1060	0253059	0257154	0261245	0265333	0269416
1070	0293838	0297895	0301948	0305997	0310043
1080	0334238	0338257	0342273	0346285	0350293
1090	0374265	0378248	0382226	0386202	0390173
1100	0413927	0417873	0421816	0425755	0429691
1110	0453230	0457141	0461048	0464952	0468852
1120	0492180	0496056	0499929	0503798	0507663
1130	0530784	0534626	0538464	0542299	0546131
1140	0569049	0572856	0576661	0580462	0584260
1150	0606978	0610753	0614525	0618293	0622058
1160	0644580	0648322	0652061	0655797	0659530
1170	0631859	0685569	0689276	0692980	0696681
1180	0718820	0722499	0726175	0729847	0733517
1190	0755470	0759118	0762763	0766404	0770043
1200	0791812	0791830	2799045	0302656	0806265

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
9890046	9894498	9898947	9903389	9907827	10
9934362	9938769	9943172	9947569	9951963	20
9978231	9982593	9986952	9991305	9995655	30
0021661	0025986	0030295	0034605	0038912	40
0064660	0068937	0073210	0077478	0081742	50
0107239	0111474	0115704	0119931	0124154	17. 0
0149403	0153598	0157788	0161974	0166135	10
0191163	0195317	0199467	0203613	0207755	20
0232525	0236639	0240750	0244857	0248960	30
0273496	0277572	0281744	0285713	0289777	40
0314085	0318123	0322157	0326188	0330214	50
0354297	0358298	0362295	0366289	0370279	18. 0
0394141	0398106	0402066	0406023	0409977	10
0433623	0437551	0441476	0445398	0449315	20
0472749	0476642	0480532	0484418	0488301	30
0511525	0515384	0519239	0523091	0526939	40
0549959	0553783	0557605	0561423	0565237	50
0588055	0591846	0595634	0599419	0603200	19. 0
0625820	0629578	0633334	0637086	0640834	10
0663259	0666986	0670709	0674428	0673145	20
0700379	0704073	0707765	0715453	0715138	30
0737184	0740847	0744507	0748164	0751819	40
0773679	0767312	0780942	0784568	0788192	50
0809870	0813473	0817073	0820669	0824263	20. 0

Logarithmos de los Números naturales , y de las

Num.	0	1	2	3	4
1210	0827854	0831441	0835026	0838608	0842187
1220	0863598	0867157	0870712	0874265	0877814
1230	0899051	0902581	0906107	0909631	0913152
1240	0934217	0937718	0941216	0944711	0948204
1250	0969100	0972573	0976043	0979511	0982975
1260	1003705	1007151	1010594	1014034	1017471
1270	1038037	1041456	1044881	1048284	1051694
1280	1072100	1075491	1078880	1082267	1085650
1290	1105807	1109262	1112625	1115985	1119343
1300	1139434	1142773	1146110	1149444	1152776
1310	1172713	1176027	1179338	1182647	1185954
1320	1205730	1209028	1212315	1215598	1218880
1330	1238516	1241781	1245042	1248301	1251558
1340	1271048	1274288	1277525	1280760	1283993
1350	1303338	1306553	1309768	1312978	1316187
1360	1335389	1338581	1341771	1344959	1348144
1370	1367206	1370375	1373541	1376705	1379866
1380	1398791	1401937	1405080	1408222	1411361
1390	1430148	1433271	1436392	1439511	1442628
1400	1461280	1464381	1467480	1470577	1473671
1410	1492191	1495270	1498347	1501422	1504494
1420	1522883	1525941	1528996	1532049	1535100
1430	1553360	1556396	1559430	1562462	1565492
1440	1583625	1586640	1589653	1592663	1595672

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
0845763	0849336	0852906	0856473	0860037	20.10
0881361	0884905	0888446	0891984	0895519	20
0916670	0920185	0923697	0927206	0930713	30
0951694	0955180	0958665	0962146	0965624	40
0986437	0989896	0993353	0996806	1000257	50
1020905	1024337	1027766	1031193	1034616	21. 0
1055102	1058507	0061909	1065309	1068705	10
1089031	1092410	1095785	1099159	1102529	20
1122698	1126050	1129400	1132747	1136092	30
1156105	1159432	1162756	1166077	1169396	40
1189258	1192509	1195858	1199154	1202448	50
1222159	1225435	1228709	1231981	1235250	22. 0
1254813	1258065	1261314	1264561	1267806	10
1287223	1290451	1293676	1296899	1300119	20
1319393	1322597	1325798	1328998	1332195	30
1351327	1354507	1357685	1360861	1364034	40
1383027	1386184	1389339	1392492	1395643	50
1414498	1417632	1420761	1423895	1327022	23. 0
1445742	1448858	1451964	1455072	1458177	10
1476763	1479853	1482941	1486027	1489110	20
1507564	1510633	1513699	1516762	1519824	30
1538149	1541195	1544240	1547282	1550322	40
1568519	1571544	1574568	1577589	1580608	50
1598678	1601683	1604685	1607686	1610684	24. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
1450	1613680	1616674	1619666	1622656	1625644
1460	1643529	1646502	1649474	1652443	1655411
1470	1673173	1676127	1679078	1682027	1684975
1480	1702617	1705551	1708482	1711412	1714339
1490	1731863	1734776	1737688	1740598	1743506
1500	1770913	1763807	1766699	1769590	1772478
1510	1789769	1792645	1795518	1798389	1801259
1520	1818436	1821292	1824147	1826999	1829850
1530	1846914	1849752	1852588	1855422	1858254
1540	1875207	1878026	1880844	1883659	1886473
1550	1603317	1906118	1908917	1911715	1914510
1560	1931246	1934029	1936810	1939590	1942367
1570	1958997	1961762	1964525	1967287	1970047
1580	1986571	1989319	1992045	1994809	1997552
1590	2013971	2016702	2019431	2022158	2024883
1600	2041200	2043913	2046625	2049335	2052044
1610	2068259	2070955	2073650	2076344	2079035
1620	2095150	2097830	2100508	2103185	2105860
1630	2121876	2124540	2127202	2129862	2132521
1640	2148438	2151086	2153732	2156376	2159018
1650	2174839	2177471	2180100	2182729	2185355
1660	2201081	2203696	2206310	2208922	2211533
1670	2127165	2229764	2232363	2234959	2237555
1680	2253093	2255677	2258260	2260841	2263421

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
1628630	1631614	1634596	1637575	1640553	10
1658376	1661340	1664301	1667261	1670218	20
1687920	1690864	1693805	1696744	1699682	30
1717265	1720188	1723110	1726029	1728247	40
1746412	1749316	1752218	1755118	1758016	50
1775365	1778250	1781133	1784013	1786892	25. 0
1804126	1806992	1809856	1812718	1815578	25.10
1832668	1835545	1838390	1841234	1844075	20
1861084	1823912	1866739	1869563	1872386	30
1889285	1892095	1894903	1897710	1900514	40
1917304	1920096	1922886	1925675	1928461	50
1945143	1947918	1950690	1953461	1956229	26. 0
1972806	1975562	1978317	1981070	1983821	10
2000293	2003032	2005769	2008505	2011239	20
2027607	2030329	2033049	2035768	2038485	30
2054750	2057455	2060159	2062860	2065560	40
2081725	2084414	2087100	2089785	2092468	50
2108534	2111205	2113876	2556544	2119211	27. 0
2135178	2137833	2140487	2143139	2145790	10
2161659	2164298	2166936	2169572	2172207	20
2187980	2190603	2193225	2195845	2198464	30
2214142	2216750	2219356	2221960	2224563	40
2240148	2242740	2245331	2247920	2250507	50
2265990	2268576	2271151	2273724	2276296	28. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
1690	2278867	2281436	2284004	2286570	2289134
1700	2304489	2307043	2309596	2312146	2314696
1710	2329961	2332500	2335038	2337574	2340108
1720	2355284	2357809	2360331	2362853	2365373
1730	2380461	2382971	2385479	2387986	2390491
1740	2405492	2407988	2410482	2412974	2415465
1750	2430380	2432861	2835341	2437819	2440296
1760	2455127	2457594	2460059	2462523	2464986
1770	2479733	2482186	2484637	2487087	2489536
1780	2504200	2506639	2509077	2511513	2513949
1790	2528530	2530956	2533380	2535803	2538224
1800	2552725	2555137	2557548	2559957	2562365
1810	2576786	2579185	2581582	2583978	2586373
1820	2600714	2603099	2605484	2607867	2610248
1830	2624511	2626883	2629255	2631625	2633993
1840	2648178	2650538	2652896	2655253	2657609
1850	2671717	2674064	2676410	2678754	2681097
1860	2695129	2697464	2699797	2702129	2704459
1870	2718416	2720738	2723058	2725378	2727696
1880	2741578	2743888	2746196	2748503	2750809
1390	2764618	2766915	2769211	2771506	2773800
1900	2787536	2789821	2792105	2794388	2796669
1910	2810334	2812607	2814879	2817150	2819419
1920	2833012	2835374	2837134	2839793	2842051

partes sexagesimas. Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
2291697	2294258	2206818	2299377	2301934	10
2317244	2319790	2322335	2324879	2327421	20
2342641	2345173	2347703	2350232	2352759	30
2367891	2370408	2372923	2375437	2377950	40
2392995	2395497	2397998	2400498	2402996	50
2417954	2420442	2422929	2425414	2427898	29. 0
2442771	2445245	2447718	2450189	2452658	10
2467447	2469907	2472365	2474823	2477278	20
2491983	2494430	2496874	2499318	2501759	30
2516382	2518815	2521246	2524675	2526103	40
2540645	2543063	2545481	2547897	2550312	50
2564772	2567177	2569582	2571984	2574386	30. 0
2587766	2591158	2593549	2595939	2598327	30.10
2612629	2615008	2617385	2619762	2622137	20
2636361	2638727	2641092	2643455	2645817	30
2659964	2662317	2664669	2667020	2669369	40
2683439	2685780	2688119	2690457	2692794	50
2706788	2709116	2711443	2713769	2716093	31. 0
2740013	2732328	2734643	2736956	2739268	10
2753114	2755417	2757719	2760020	2762320	20
2776092	2778383	2780673	2782962	2785250	30
2798950	2801229	2803507	2805784	2808059	40
2821688	2823955	2826221	2828486	2830750	50
2844307	2846563	2848817	2851070	2853322	32. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
1930	2855573	2857823	2860071	2862319	2864065
1940	2878017	2880355	2882492	2884728	2886963
1950	2900346	2902173	2904798	2907022	2909246
1960	2922561	2924776	2926990	2929203	2931415
1970	2944662	2946866	2949069	2951271	2953471
1980	2966652	2968845	2971037	2973227	2975417
1990	2988531	2990713	2992893	2995073	2997252
2000	3010300	3012471	3014641	3016809	3018977
2010	3031961	3034121	3036280	3038438	3040595
2020	3053514	3055663	3057812	3059959	3062105
2030	3074960	3077099	3079237	3081374	3083509
2040	3096302	3098430	3100557	3102684	3104809
2050	3117539	3119657	3121774	3123889	3126004
2060	3138672	3140780	3142887	3144992	3147097
2070	3159703	3161801	3163898	3165993	3168088
2080	3180633	3182721	3184807	3186893	3188977
2090	3201463	3203540	3205617	3207692	3209767
2100	3222193	3224261	3226327	3228393	3230457
2110	3242825	3244882	3246939	3248995	3261050
2120	3263359	3265407	3267454	3269500	3271545
1130	3283796	3285834	3287872	3289909	3291944
2140	3304138	3306167	3338195	3310222	3312248
2150	3324385	3326404	3328423	3330440	3332457
2160	3344538	3346548	3348557	3350565	3352573

partes sexagesimos. La Caracteristica supuesta,

5	6	7	8	9	*Sex.*
1866710	2869054	2871296	2875558	2875778	10
2889196	2891428	2893660	2895890	2898118	20
2911460	2913689	2915908	2918127	2920344	30
2953526	2935835	2938044	2940251	2942457	40
2955671	2957869	2960067	2962263	2964458	50
2977605	2979792	2981979	2984164	2986348	33. 0
2990429	3001605	3003781	3005955	3008128	10
3021144	3023309	3025474	3027657	3029799	20
3042751	3044905	3047059	3049212	3051363	30
3064250	3066394	3068557	3070680	3072820	40
3085644	3087778	3089910	3092842	3094172	50
3106233	3109056	3111178	3113300	3115420	34. 0
3128118	3130231	3132343	3134454	3136563	10
3149201	3151303	3153405	3155505	3157605	20
3570181	3272275	3174365	3176455	3178545	30
3191061	3193143	3195224	3197305	3199384	40
3211840	3213913	3215984	3218055	3220124	50
3232521	3234584	3236645	3238706	3240766	35. 0
3253104	3255157	3257209	3259260	3261310	35.10
3275589	3271633	3277675	3279716	3281757	20
3293979	3296012	3298045	3300077	3302108	30
3314275	3316297	3318320	3320343	3322364	40
3334473	3336488	3338501	3340514	3342526	50
3354579	3356585	3358589	3360593	3362596	36. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
2170	3364597	3368598	3368598	3370597	3372595
2180	3384555	3386557	3388547	3390437	3392526
2190	3404441	3406424	3408405	3410386	3412366
2200	3424227	3426200	3428173	3430145	3432116
2210	3443923	3445887	3447851	3449814	3451776
2220	3463530	3446486	3467441	3469395	3471348
2230	3483049	3484996	3486942	3486942	3490432
2240	3502480	3504419	3506356	3508293	3510229
2250	3521825	3523755	3525684	3537612	3529539
2260	3541084	3543006	3544926	3546846	3548764
2270	3560259	3562171	3564083	3565994	3567905
2280	3579348	3581273	3583156	3585059	3586961
2290	3598355	3600251	3602146	3604041	3605934
2300	3617278	3619166	3621053	3622939	3624825
2310	3636120	3637999	3630878	3641756	3643634
2320	3654880	3656761	3658622	3660492	3662361
2330	3673559	3675423	3677285	3679147	3681006
2340	3692159	3694014	3695869	3697723	3699576
2350	3710679	3712526	3714373	3716219	3718065
2360	3729120	3730960	3732799	3734637	3736475
2370	3547483	3749316	3751147	3752677	3754807
2380	3765770	3767594	3769418	4771240	3713063
2390	3783979	3783999	3787612	3789427	3791241
2400	3802112	3803922	3805730	3807538	3809345

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
3374595	3376589	3378584	3380579	3382572	10
3394514	3396502	3398488	3400473	3402458	20
3414045	3416323	3418301	3420277	3422252	30
3434086	3436055	3438023	3439991	3441957	40
3453737	3455698	3457657	3459615	3401573	10
3473300	3475252	3477202	3479152	3481101	37. 0
3492775	3494718	3496660	3498601	3500541	10
3512163	3514098	3516031	3517963	3519895	20
3531465	3533391	3535316	3537239	3539162	30
3550682	3552599	3554515	3556431	3558345	40
3569814	3571723	3573630	3575537	3577443	50
3588862	3590762	3592662	3594560	3596458	38. 0
3607827	3609716	3611610	3613500	3615390	10
3626709	3628593	3630476	3632358	3634239	20
3645510	3647386	3549260	3651134	3653007	30
3664230	3666097	3667964	3669830	3671695	40
3682869	3684728	3686587	3688445	3690302	50
3701428	3703280	3705131	3706981	3708830	39. 0
3719909	3721753	3723596	3725438	3737279	10
3738311	3740147	3741983	3743817	3745651	20
3756686	3758463	3760292	3762119	3763944	30
3774884	3776704	3778524	3780343	3642161	40
3793055	3794868	3796680	3798492	3800302	50
3833351	3812956	3814761	3816565	3818368	40. 0

Logarithmos de los Números naturales , y de las

Num.	0	1	2	3	4
2410	3820170	3821972	3823773	3825573	3827373
2420	3838154	3839948	3841741	3843534	3845326
2430	3856003	3857850	3859636	3861421	3863206
2440	3873898	3875678	3877457	3879235	3881012
2450	3891661	3893433	3895205	3896975	3898746
2460	3909351	3911116	3912880	3914644	3916407
2470	3926970	3928727	3930485	3932241	3933997
2480	3944517	3946268	3948018	3949767	3951516
2490	3961993	3963737	3965480	3967223	3967964
2500	3979400	3981137	3982873	3984608	3986343
2510	3996737	3998467	3000196	4001925	4003653
2520	4014005	4015728	4017451	4019173	4020894
2530	4031205	4032921	4034637	4036352	4038066
2540	4048337	4050047	4051755	4053464	4055171
2550	4061402	4067105	4068807	4070508	4072209
2560	4082400	4084096	4085791	4087486	4089180
2570	4099331	4101021	4102710	4104398	4106085
2580	4116197	4117880	4119562	4121244	4122925
2590	4132998	4134674	4136350	4138025	4139700
2600	4149733	4151404	4113073	4154742	4156410
2610	4166405	4168069	4169730	4171394	4173056
2620	4183013	4184670	4186327	4187983	4189638
2630	4199557	4201208	4202859	4204509	8206158
2640	4216039	4217684	4219328	4220972	4222615

partes sexagesimas. Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
3829171	3830969	3832767	3844563	3836359	20.10
3847117	3848908	3850698	3852487	3854275	20
3864990	3866778	3868555	3870337	3872118	30
3882789	3884565	3886340	3888114	3889888	40
3900515	3902284	3904052	3905819	3907585	50
3918169	3919931	3921691	3923452	3925211	31. 0
3935752	3937506	3939260	3941013	3942765	10
3653264	3955011	3956758	3958504	3960249	20
3970706	3973446	3974185	3975924	3977663	30
3988077	3989811	3991543	3993275	3995007	40
4005380	4007106	4008832	4010557	4012282	50
4022614	4024333	3026052	4027771	4029488	32. 0
4″39780	4041492	4043205	4044916	4046627	10
4056878	4058584	4060289	4061994	4063698	20
4073909	4075608	4077307	4079005	4080703	30
4090874	4092567	4094259	4095950	4097641	40
4107772	4109459	4111144	4112829	4114513	50
4124605	4126285	4127964	4129643	4131321	33. 0
4141374	4143047	4144719	4146391	4148063	10
4158077	4159744	4161410	4163076	4164741	20
4174717	4176377	4178037	4179696	4181355	30
4191293	4192947	4194601	4196254	3197906	40
420,806	4209454	4211101	4212748	4214394	50
4224257	4225498	4227539	4229180	4230820	34. 0

Logarithmos de los Números naturales , y de las

Num.	0	1	2	3	4
2650	4232459	4234097	4235735	4237373	4239009
2660	4248816	4250449	4152081	4253712	4255342
3670	4260113	4266739	4168365	4269990	4271614
2680	4281348	4282968	4284588	4286207	4287825
2690	4297523	4299137	4300751	4302364	4303976
2270	4313638	4315246	4316853	4318460	4320067
2710	4329693	4331295	4332897	4334498	4336098
2720	4345689	4347285	4348881	4350476	4352071
2730	4361626	4363217	4364807	4366396	4367985
2740	4377076	4379090	4380675	4382258	4383841
2750	4393327	4394906	4396484	4398062	4399639
2760	4409091	4410664	4412237	4413806	4415380
2770	4424798	4426365	4427932	4429499	4431065
2780	4440448	4442010	4443571	4445132	4446692
2790	4456042	4457598	4459154	4460709	4462264
2800	4471580	4473131	4474681	4476231	4477780
1810	4487063	4488608	4490153	4491697	4493241
2820	4502491	4104031	4505970	4507109	4508647
2830	4517864	4519399	4520932	4522466	4523998
2840	4533183	4534712	4536241	4537769	4539296
2850	4548489	4549972	4551495	4553018	4554540
2860	4563660	4565179	4566696	4568213	4569730
2870	4578819	4580332	4581844	4583356	4584868
2880	4593925	4595433	4596940	4598446	4599953

partes sexagesimas. *La Caracteristica supuesta.*

5	6	7	8	9	*Sex.*
4240645	4242281	4243916	4245550	4247183	10
4256972	4258601	4260230	4261858	4263486	20
4273238	4274861	4276484	4278106	4279727	30
4289343	4291061	4292677	4294293	4295908	40
4305588	4307191	4308809	4310419	4212026	50
4321673	4323278	4324883	4326487	4228090	35. 0
4337698	4339298	4346896	4342495	4344092	45.10
4353665	4355259	4356851	4358444	4360035	20
4369573	4371161	4372748	4374334	4375920	30
4385423	4387005	4388587	4390167	4391747	40
4301216	4402792	4404368	4405943	4407517	50
4316951	4418522	4420092	4421661	4423230	46. 0
4432630	4434195	4435759	4437322	4438885	10
4448252	4449811	4451370	4452928	4454485	20
4463818	4465372	4466925	4468477	4470029	30
4479329	4480877	4482424	4483971	4485517	40
4494784	4496327	4497868	4499410	4500951	50
4510185	4511722	4513258	4514794	4516329	47. 0
4525531	4527062	4528593	4530124	4531654	10
4540823	4142349	4543875	4545400	4546924	20
4556061	4557582	4559102	4560622	4562142	30
4571246	4572762	4574277	4575791	4577305	40
4586378	4587889	4589399	4590908	4592417	50
4601458	4602963	4604468	4605972	4607475	48. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
2890	4608978	4610481	4611983	4613484	4614985
2900	4623980	4625477	4626974	4628470	4629966
2910	4648930	4640422	4641914	4643405	4644895
2920	4653829	4615316	4656802	4658288	4659774
2930	4668676	4670158	4671640	4673121	4674601
2940	4683473	4684950	4686437	4687903	4689378
2950	4698220	4699692	4701164	4702634	4704105
2960	4712917	4714384	4715851	4717317	4718782
2970	4727564	4729027	4730488	4731949	4733410
2980	4742163	4743620	4745076	4746533	4747988
2990	4756712	4758164	4759616	4761067	4762518
3000	4771213	4772660	4774107	4775553	4776999
3010	4785665	4787108	4788550	4789991	4791432
3020	4800069	4801507	4802945	4804381	4805818
3030	4814426	4815859	4817292	4818724	4820156
3040	4828736	4830164	4831592	4833020	4834446
3050	4842998	4844422	4845845	4847268	4848690
3060	4857214	4858633	4860052	4861470	4862888
3070	4871384	4862798	4874212	4875626	4877039
3080	4885507	4886917	4888326	4889735	4891144
3090	4899585	4900990	4902395	4903799	4905203
3100	4913617	4915018	4916418	4917818	4919217
3110	4927604	4929000	4930396	4931791	4933186
3120	4941446	4942938	4944329	4945720	4947110

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
4616486	4617986	4619485	4620984	4622482	10
4631461	4632956	4634450	4635944	4637437	20
4646386	4647875	4649364	4650853	4652341	30
4661259	4662743	8664227	4665711	1667194	40
4676081	4677561	4679039	4680518	4681996	50
4690853	4692327	4693801	4695275	4696748	49. 0
4705575	4707044	4708513	4709982	4711450	10
4720247	4721711	4723175	4724639	4726102	20
4738870	4736329	4737788	4739247	4740705	30
4749443	4750898	4752312	4753806	4755259	40
4763968	4765418	4766867	4768316	4769765	50
4778445	4779890	4781334	4782778	4784222	50. 0
4798873	4794313	4765753	4797192	4798631	50.10
4807244	4808689	4810128	4811559	4812993	20
4825587	4723018	4824448	4825878	4827307	30
4035873	4827299	4838725	4840150	4841574	40
4810112	4851533	4852954	4854375	4855795	50
4864305	4865722	4867138	4868554	4869966	51. 0
4878461	4879863	4881275	4882686	4884097	10
4862552	4893959	4895366	4896773	4898179	20
4906607	4908010	4909412	4910414	4912216	30
4920616	4922015	4923413	4924810	4926207	40
4934581	4935974	4937368	4938761	4940154	50
4948500	4949890	4951279	4952667	4954056	52. 0

Logarithmos de los Números naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
3130	4955443	4656831	4958218	4959604	4960990
3240	4969296	4970679	4972062	4973444	4974825
3150	4983106	4984484	4985862	4987240	4988617
3160	4996871	4998245	4999619	5000992	5002365
3170	5010593	5011962	5013332	5014701	5016069
3180	5024271	5025637	5027002	5028366	5029731
3190	5037907	5039268	5040629	5041989	5043349
3200	5051500	5052857	5054213	5055569	5056925
3210	5065050	5066403	5067755	5069107	5070459
3220	5078559	5079907	5081255	5082603	5083950
3230	5092025	5093370	5094714	5096057	5097400
3240	5105450	5106790	5108130	5109465	5110808
3250	5118834	5120170	5121505	5122841	5124175
3260	5132176	5133508	5134840	5136171	5137502
3270	5145478	5146805	5148133	5149460	5150787
3280	5158738	5160062	5161386	5162709	5164031
3290	5171959	5173279	5174598	5175917	5177236
3300	5185139	5186455	5187771	5189086	5190400
3310	5198280	5199592	5200903	5202214	5203525
3320	5211381	5212689	5213996	5215303	5216610
3330	5224442	5225746	5227050	5228353	5229656
3340	5237465	5238765	5420064	5241364	5242663
3350	5250448	5251744	5253040	5254336	5255631
3360	5263393	5264685	5265977	5266269	5268560

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	Sex.
4962375	4963761	4965145	4966529	4531654	10
4976256	4977587	4978967	4980347	4546924	20
4989994	4991370	4992746	4994121	4562142	30
5003737	5005109	5006481	5007852	4577305	40
5017437	5018805	5020172	5021539	4592417	50
5031094	5032458	5033821	5035183	4607445	53. 0
5044709	5046068	5047426	5048785	4622482	10
5058280	5059635	5060990	5062344	4637437	20
5071810	5073160	5074511	5075860	4652341	30
5085297	5086644	5087990	5089335	4667194	40
5098743	5100085	5101427	5102768	4681996	50
5112147	5113485	5114823	5116160	4696748	54. 0
5125510	5126844	5128178	5129511	4711450	10
5138832	5140162	5141491	5142820	4726102	20
5152113	5153439	5154764	5156039	4740705	30
5165354	5166676	5167997	5169318	4755259	40
5178554	7179372	5181189	5182507	4769765	50
5191715	5193028	5194342	5195655	4784222	55. 0
5204835	5206145	5107455	5208764	4798631	55.10
5217916	5219222	5220528	5221833	4812993	20
5230958	5232260	5233562	5234863	4827307	30
5243961	5245259	5246557	5247854	4841574	40
5256925	5258220	5259513	5260807	4855795	50
5269851	5271141	5272431	5273721	4869969	56. 0

Logarithmos de los Numeros naturales, y de las

Num.	0	1	2	3	4
3370	5276299	5277588	5278876	5280163	5281451
3380	5289167	5290452	5291736	5293020	5294304
3390	5301997	5303278	5304558	5305839	5307118
3400	5314789	5316066	5317343	5318619	5319896
3410	5327544	5328817	5330090	5331363	5332635
3420	5340261	5341531	5342800	5344069	5345338
3430	5352941	5354207	5355473	5356738	5358003
3440	5365584	5366847	5368109	5369370	5370631
3450	5378191	5379450	5380708	1381966	5383223
3460	5390761	5392016	5393271	5394525	5395779
3470	5403295	5404546	5405797	5407048	5408298
3480	5415792	5417040	5418288	5419535	5420781
3490	5428254	5429498	5430742	5431986	5433229
3500	5440680	5441921	5443161	5444401	5445641
3510	5453071	5454308	5455545	5456781	5458018
3520	5465427	5466660	5467894	5469126	5470359
3530	5477747	5478977	5480207	5481436	5482665
3540	5490033	5491259	5492486	5493712	5494937
3550	5502284	5503507	5504730	5505952	5507174
3560	5514500	5515722	5516939	5518158	5519377
3570	5526682	5528899	5529115	5530330	5531545
3580	5538830	5510043	5541256	5542468	5543680
3590	5550944	5552154	5553363	5554572	5555781
3600	5563025	5564231	5565437	5566643	5567848

partes sexagesimas. La Caracteristica supuesta.

5	6	7	8	9	*Sex.*
5282738	5284024	5285311	5286596	5287882	01
5295587	5296870	5298152	5299434	5300716	20
5308398	5309677	5310955	5312234	5313512	30
5321171	5322446	5323721	5324996	5326270	40
5333907	5335179	5336450	5337721	5338991	50
5346606	5347874	5349141	5350408	5351675	57. 0
5359267	5360532	5361795	5363059	5364322	10
5371892	5373153	5374413	5375673	5376932	20
5384481	5385737	5386994	5388250	5389506	30
5397032	5398286	5399538	5400791	5402043	40
5409548	5410798	5412047	5413296	5414544	50
5422028	5423274	5424519	5425765	5427010	58. 0
5434472	5435714	5436956	5438198	5439449	10
5446880	5448119	5449358	5450596	5451834	20
5459253	5460489	5461824	5462958	5464193	30
5471591	5472823	5474055	5475284	5476517	40
5483894	5485123	5486351	5487578	5488806	50
5496162	5497317	5498612	5499836	5501060	59. 0
5508396	5509618	5510839	5512059	5513280	10
5520595	5521813	5523031	5524248	5525465	20
5532760	5533975	5535189	5536403	5537617	30
5544892	5546103	5547314	5548524	5549735	40
5156989	5558197	5559404	5560612	5561818	50
5569053	5570257	5571461	5572665	5573869	60. 0

APENDICE

DE LAS FRACCIONES DECIMALES.

1°. Se llaman fracciones Decimales, á las que tienen por denominador, la unidad acompañada de uno, ó mas ceros para la derecha.

2°. Por medio de la particion ordinaria se tienen las igualaciones siguientes: $\frac{49821}{10}=4982+\frac{1}{10}$ $\frac{8523}{100}=85+\frac{23}{100}$. $\frac{2704}{1000}=2+\frac{704}{1000}$ &c: luego qualquiera fraccion impropia decimal será igual, á la cantidad que resulta con solo escrivir el numerador, y separar sus cifras por una coma, dejando tantas para mano derecha quantos ceros huviese en el denominador, si se combiene en que expresen enteros las cifras que quedan á la izquierda de la coma, y decimos las que quedan á la derecha, quando el denominador fuere 10, centecimos quando fuere 100 &c. Exemplo: $\frac{349253}{1000}=349,253$, y se leé 349 enteros y 253 milesimos.

3°. Para expresar las fracciones propias decimales por el estilo de las impropias, bastará arreglandose á lo combenido en estas, escrivir el númerador con un número de cifras igual al de los ceros que hubiese en el denominador, anteponiendo á la cantidad que resulta una coma y á esta un cero. Exemplos: $\frac{259}{1000}=0,259$, y se leé, o ó ente-

ros y 259 milesimos $\frac{428}{100000}=0,00428$, y se leé, ó enteros y 428 cien milesimos.

4°. A las cifras que queden á la derecha de la coma se llamarán cifras decimales.

5°. Se sigue de lo dicho en los parrafos 2°. y 3°. que las particiones de qualesquiera cantidades compuestas solamente de enteros por la unidad acompañada de un número qualesquiera de ceros para la derecha, se egecutarán con solo separar por una coma, las cifras del dividendo de suerte que resulten tantas cifras decimales quantos ceros hubiese en el divisor, y dando á las expresiones que salieren las denominaciones que en los citados parrafos se dieron á otras semejantes. Por exemplo $452025:1000=452,025$, $891:100000=0,00891$.

6°. Por las operaciones de los quebrados, y por lo dicho hasta aqui de las fracciones decimales, es claro que $\frac{125,31}{100}=\frac{125+\frac{31}{100}}{100}=\frac{125\times100+31}{100\times100}=\frac{12531}{10000}=1,2531$. Tambien por las mismas razones $\frac{0,045}{100}=\frac{\frac{45}{1000}}{100}=\frac{45}{100\times1000}=\frac{45}{100000}=0,00045$: de donde resulta que para partir una fraccion (propia, ó impropia) decimal, por la unidad acompañada de un número qualesquiera de ceros para la derecha, basta colocar la coma tantas cifras mas para la izquierda de lo que estaba quantos ceros hubiese en el divisor. La operacion imbersa se hará

im-

imbersamente, pues por lo dicho $\frac{480254}{1000} = 480{,}254$: luego $480{,}254 \times 1000 = 480254$, por que el cociente $\times$ divisor $=$ dividendo. Tambien $\frac{849{,}25}{100} = 8{,}4925$: luego $8{,}4925 \times 100 = 849{,}25$ por la razon que se acaba de dar.

7°. En qualquiera fraccion decimal, como por exemplo 0,45, sucede que $0{,}45 = \frac{45}{100} = \frac{45000}{100000} = \ldots$ 0,45000, esto es, que $0{,}45 = 0{,}45000$: de donde se sigue que á toda fraccion decimal, puede agregarse para la derecha qualquiera numero de ceros sin alterar su valor. La imbersa se infiere de lo mismo.

DE LA ADICCION, SUBSTRACCION, multiplicacion, y division de las fracciones decimales.

8°. Las fracciones decimales se suman, y restan, colocandolas de suerte que las unidades caigan devajo de las unidades, las decenas devajo de las decenas &c, los decimos devajo de los decimos, los centesimos devajo de los centesimos &c, y operando despues con éllas, como si las cifras de cada una no estubiesen separadas por su coma correspondiente, con la sola diferencia de que las cifrás de las sumas ó restas que resultan, se séparan por otra coma que caiga debajo de las que hay en las fracciones que se suman, ó restan.

EXEMPLOS.

$2834,023 = A$
$249,71 = B$
$42,1534 = C$
$3125,8864 = A+B+C.$

$5904,0034 = D$
$820,450074 = E$
$5083,553326 = D-E.$

Estas operaciones son por sí tan evidentes que no nesecitan demostrarse.

9°. Si se eligen qualesquiera fracciones decimales como por exemplo 3,498....24,3; y 0,25, y se multiplican entre sí, resultarán las igualaciones siguientes: $3,498 \times 24,3 \times 0,25 = \frac{3498}{1000} \times \frac{243}{10} \times \frac{25}{100} =$ - - - - - - -
$\frac{3498 \times 243 \times 25}{1000 \times 10 \times 100} = \frac{21250350}{1000000} = 21,250350.$ . . . .

El mismo exemplo practicado, como resulta de la regla que se dá.

Una cosa semejante sucede con qualesquiera fracciones que se elijan: luego inbestigando la operacion precedente, resulta en general, que para multiplicar qualesquiera fracciones decimales, se hace la operacion como si en estas cantidades no hubiese comas que separasen sus cifras, y despues se separan por otra coma las que resultan en el producto desuerte, que este tenga tantas cifras de-

```
   3,498
    24,3
  ------
   10494
  13992
  6996
  ------
 85,0014
    0,25
  ------
 4250070
1700028
  ------
21,250350
```

decimales quantas huviese en los factores.

10°. De lo que acaba de decirse, se infiere que el numero de cifras decimales de uno de los factores es igual al numero de cifras decimales del producto menos al número de las del otro factor. Ámas, el producto partido por el uno de sus factores dá por cociente el otro factor: luego atendiendo á lo hecho en la multiplicacion de las fracciones decimales se concluye de todo, que para partirlas se hace la operacion como si en estas cantidades no hubiese comas que separasen sus cifras, y despues se separan por otra coma las que resultan en el cociente, desuerte que este tenga tantas cifras decimales quantas en el dividendo hubiese demas que en el divisor. Pero si no pudiere verificarse esta regla por ser las cifras decimales del dibidendo en menor número que las del divisór, se agregarán á aquellas para la derecha antes de hacer la particion, tantos ceros quantos fueren necesarios para la verificacion de dicha regla, y otros tantos mas quantas cifras decimales se quieran tener en el cociente. Esto sucede en el 2°. exemplo en que 49,1 se quieren partir por 20,074; pero de suerte que el cociente tenga dos cifras decimales. En este exemplo no se hace aprecio del último residuo, pues partido por el divisor daria por cociente una tercera cifra decimal: número que excederia del prescrito. En el primer exemplo en que se parten 85,0014 por 2,43 resulta un cociente exacto. En el 3°. exemplo en que se trata de partir 45,721 por 18,04 de suerte que el cociente tenga tres cifras decimales, es necesario agregar á las del dividendo pa-

para la derecha dos ceros, y tampoco se hace aprecio del ultimo residuo por lo que se dijo de este en el 2°. exemplo. Se ha de tener presente que los dividendos no han variado de valor con la agregacion de los ceros por lo demonstrado en el número 7°.

EXEMPLOS.

1°.

85,0014	3,498
1210	2,43. divis.
02381	
01944	
0000	

2°.

49,10000	2,44
08 9520	20,074. divis.
0 92540	
11944	

3°.

45,72100	2,534
09 641	18,04. divisor.
0 6210	
07980	
0764	

11° En estas quatro operaciones pueden concurrir cantidades compuestas solamente de enteros con fracciones decimales, y en estos casos se observarán las mismas reglas que se acaban de dar, pues todo entero puede considerarse como una fraccion que tiene por denominador la unidad acompañada

de

de un número cero de ceros para la derecha.

DE ALGUNAS PROPIEDADES DE LAS *fracciones decimales, y de las transformaciones de las comunes en fracciones de aquella especie.*

12°. TEnemos que 21,8>21,79 porque 21,8=21,80>21,79. Tambien 0,54>0,5395 porque 0,54=0,5400>0,5395. Tambien 18,41>2,8943 y 0.519412>0,519.

13°. Por lo dicho en la adiccion de estas fracciones es claro, que qualquiera de ellas como por exemplo 40,9214 se descompone en 40,92 y 0,0014, esto es, que 40,9214=40,92+0,0014, y por consiguiente 40,92144 0,001=40,92 : luego si en 40.9214 se suprimen las dos ultimas cifras, la fraccion disminuirá solo de 0,0014. De aqui nace que en una fraccion decimal en que hay muchas cifras decimales, pueden suprimirse algunas sin que por esto se altere sensiblemente el valor de la fraccion, y esta alteracion, en el caso que se quiera suprimir un numero determinado de cifras, puede reducirse á la menor posible agregando una unidad á la que resulta ultima cifra de la derecha despues de suprimidas las que se quieran, siempre que entre estas la ultima de la izquierda sea mayor que 5. Si por exemplo en la fraccion 0,6945 se quieren suprimir las tres ultimas cifras, porque se suponga despreciable toda exactitud que pase de un decimo, resultará por la regla dada la fraccion 0,7, que se aproxima mas á 0,6945 que no 0,6,

pu-

pues la que se aproxima igualmente de 0,7 y de 0,6 es 0.65 menor que 0,6945.

14°. En vista de la suma facilidad y limpieza con que se practican en las fracciones decimales todas las operaciones que se han hecho hasta aqui, resulta, que será mui util en la mayor parte de los casos el transformar las fracciones comunes en fracciones decimales. Para esto se pone el numerador por dividendo y el denominador por divisor, agregando á aquel en el caso de ser propia la fraccion los ceros indispensables para que pueda verificarse la particion por el metodo ordinario, y á mas otros tantos quantos se necesiten para que con los agregados anteriormente compongan el numero de cifras decimales que se quieran tener en el cociente, el qual será la fraccion que se desea. Por que agregar á la derecha del dividendo, por exemplo quatro ceros, es multiplicarlo por 10000, y asi el cociente resultará 10000 veces mayor de lo devido: luego ha de disminuirse las mismas 10000 veces, que es partirlo por 10000, ó separar por una coma las cifras de dicho cociente desuerte que resulten quatro cifras decimales, que es el numero de ceros agregados al numerador. Para evitar toda equibocacion las cifras de este se separarán de los ceros agregados por una pequeña raya.

EXEMPLOS.

1°.

$\frac{740}{24} = 30{,}841$

```
740|000|30,841
0200   |24
 0080  |
  040  |
   16  |
```

2°.

$\frac{342}{15} = 22{,}8$

```
342|0 |22,8
042   |15
 120  |
 000  |
```

3°.

$\frac{1}{4} = 0{,}25$

```
1|00|,25
0 20|4
  00|
```

4°.

$\frac{1}{3} = 0{,}3333$ &c.

```
1|0|,3&c.
0 1|3
```

5°.

$\frac{1}{12} = 0{,}083333.$ &c.

```
1|000|,083 &c.
0 040|12
   04|
```

6.

$\frac{1}{7} = 0{,}142857\ 142857$&c.

```
1|000000|,142857&c.
0 30    |7
  020   |
   060  |
    040 |
     050|
      01|
```

$\frac{3}{13}=0,231538461\ \ 538461\ \ 538461$ &c.

3 | 0 00000000	,231538461 &c,
040	13.
010	
070	
050	
110	
0060	
080	
020	
07	

En estos siete exemplos suceden los diferentes casos que pueden ocurrir. En el 1°. se ve que $\frac{740}{24}=30,841$ con diferencia de menos de un milesimo: exactitud de que no se quiere pasar, pues no se han agregado mas de tres ceros al numerador de la fraccion. Por esta razon no se hace aprecio del último residuo. En el 2°. exemplo tenemos que $\frac{342}{15}=22,8$ exactamente, y en el 3°. que $\frac{1}{4}=0,25$ tambien exactamente. En los exemplos 4°. 5°. 6° y 7°. se vé que las fracciones $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{12}$, $\frac{1}{7}$, y $\frac{3}{13}$ no tienen expresion exacta en decimales, y esto sucederá siempre que en la particion buelva á quedar alguno de los residuos que han servido antes. Esta buelta de residuos puede ser de los quatro distintos modos que se vén en los dichos 4°, 5°, 6°, y 7°, exemplos; pero siempre el número de residuos diferentes será menor que el número de unidades del divisor. Por esta re-

gla

gla puede conocerse en que casos sucederá la repeticion de los mismos residuos , en los quales sera facilisima la aproximacion hasta el grado que se quiera.